

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 20.

12 lub 13 grudnia 2019

Zadania

1. Udowodnić, że jeśli $V = V_1 \oplus V_2$, to $V/V_1 \simeq V_2$.
2. Niech I będzie przedziałem oraz $(a_1, \dots, a_n)$ niech będzie ciągiem różnych punktów tego przedziału. Niech U będzie podzbiorem przestrzeni $C(I)$ złożonym z funkcji ciągłych f , które są równe 0 we wszystkich punktach $a_1, \dots, a_n$. Udowodnić, że U jest podprzestrzenią, oraz że $C(I)/U \simeq \mathbb{R}^n$.
3. Niech V będzie podprzestrzenią przestrzeni $K[x]$ złożoną ze wszystkich wielomianów podzielnych przez $x - a$, gdzie $a \in K$. Udowodnij, że $K[X]/V \simeq K$.
4. ($\cdot$) Niech K będzie dowolnym ciałem. Znaleźć niezerowy funkcjonal liniowy $\varphi: K^4 \rightarrow K$ równy 0 na podprzestrzeni rozpiętej na wektorach $(1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0)$.
5. ($\cdot$) Niech K będzie dowolnym ciałem. Wskazać bazy sprzężone z następującymi bazami K^n :
 - a) $\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$,
 - b) $\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_1 + \varepsilon_n$,
 - c) $\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$.
6. ($\star$) Niech A i B będą macierzami $n \times n$ takimi, że istnieją różne liczby rzeczywiste $t_0, \dots, t_n$ takie, że macierze $C_i = A + t_i B$, $i = 0, \dots, n$ są nilpotentne (t.j. $C_i^n = 0$). Udowodnij, że A i B są nilpotentne.