

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 20. – rozwiązania

12 lub 13 grudnia 2019

1. Udowodnić, że jeśli $V = V_1 \oplus V_2$, to $V/V_1 \simeq V_2$.

Rzeczywiście, jeśli $v \in V$, to $v = v_1 + v_2$, gdzie $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ jednoznacznie. Zatem niech $\varphi: V_2 \rightarrow V/V_1$ zadane jako $\varphi(v_2) = v_2 + V_1$ jest izomorfizmem, bowiem jest „na” i jest różnowartościowy.

Rzeczywiście jest różnowartościowy, bowiem jeśli $v + V_1 = v' + V_1$, gdzie $v, v' \in V_2$, to $v + 0 = v' + w$ dla $w \in V_1$, a zatem skoro zapis jako suma z V_1 i V_2 jest jednoznaczny, to $w = 0$ oraz $v = v'$. Jest natomiast na, bo jeśli $v + V_1$ jest dowolną warstwą ($v \in V$), to $v = v_2 + v_1$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, a zatem $v + V_1 = v_2 + v_1 + V_1 = v_2 + V_1$, bowiem $v_1 + V_1 = V_1$, gdyż $v_1 \in V_1$.

2. Niech I będzie przedziałem oraz $(a_1, \dots, a_n)$ niech będzie ciągiem różnych punktów tego przedziału. Niech U będzie podzbiorem przestrzeni $C(I)$ złożonym z funkcji ciągłych f , które są równe 0 we wszystkich punktach $a_1, \dots, a_n$. Udowodnić, że U jest podprzestrzenią, oraz że $C(I)/U \simeq \mathbb{R}^n$.

Bez straty ogólności założymy, że I jest otwartym przedziałem. Niech $a_i \in (a_i^-, a_i^+)$ będą parami rozłącznymi przedziałami, $i \in \{1, \dots, n\}$ zawartymi w I . Niech

$$f_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x \notin (a_i^-, a_i^+) \\ (x - a_i^-)/(a_i - a_i^-), & \text{jeśli } x \in (a_i^-, a_i] \\ (a_i^+ - x)/(a_i^+ - a_i), & \text{jeśli } x \in (a_i, a_i^+) \end{cases}.$$

Zauważmy też, że dowolną funkcję $f \in C(I)$ można przedstawić jako

$$f(x) = g(x) + \sum_{i=1}^n f(a_i) f_i(x),$$

gdzie $g \in U$. Co więcej współczynniki $b_1, \dots, b_n$ oraz funkcja $g \in U$ takie, że

$$f(x) = g(x) + \sum_{i=1}^n b_i f_i(x)$$

są jednoznacznie wyznaczone. Wobec tego, łatwo sprawdzić, że przekształcenie $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow C(I)/U$ zadane jako

$$\varphi(b_1, \dots, b_n) = \left(\sum_{i=1}^n b_i f_i \right) + U$$

jest przekształceniem liniowym i bijekcją, a zatem izomorfizmem.

3. Niech V będzie podprzestrzenią przestrzeni $K[x]$ złożoną ze wszystkich wielomianów podzielnych przez $x - a$, gdzie $a \in K$. Udowodnij, że $K[X]/V \simeq K$.

W takim razie każdy wielomian w V ma osiągać zero w punkcie a . Zatem jeśli $w \in K[x]$, to $w(x) = w(a) + v(x)$, gdzie $v \in V$. Co więcej $b \in K$ oraz wielomian $v \in V$ takie, że $w(x) = b + v(x)$ są jednoznacznie wyznaczone. Zatem, przekształcenie $\varphi: K[X]/V \rightarrow K$ zadane jako $\varphi(w + V) = w(a)$ jest dobrze zdefiniowane oraz jest izomorfizmem.

4. (·) Niech K będzie dowolnym ciałem. Znaleźć niezerowy funkcjonal liniowy $\varphi: K^4 \rightarrow K$ równy 0 na podprzestrzeni rozpiętej na wektorach $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 0, 0, 0)$.

Niech zatem $\varphi(1, 1, 1, 1) = \varphi(1, 0, 0, 0) = 0$ oraz $\varphi(0, 1, 0, 0) = \varphi(0, 0, 1, 0) = 1$. Zatem $\varphi(0, 0, 0, 1) = 0 - 0 - 1 - 1 = -2$. W takim razie $\varphi(x, y, z, t) = y + z - 2t$.

5. (..) Niech K będzie dowolnym ciałem. Wskazać bazy sprzężone z następującymi bazami K^n :

a) $\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$,

Mamy $\varphi_1(\varepsilon_1) = 1 - 0 = 1$, $\varphi_1(\varepsilon_i) = 0$ dla $i > 1$, zatem $\varphi_1 = x_1$. Mamy też $\varphi_2(\varepsilon_1) = 0 - 1 = -1$, $\varphi_2(\varepsilon_2) = 1$, $\varphi_2(\varepsilon_i) = 0$ dla $i > 2$, zatem $\varphi_2 = x_2 - x_1$. Dla $k > 2$ mamy $\varphi_k(\varepsilon_1) = 0 - 0 = 0$, $\varphi_k(\varepsilon_i) = 0$ dla $i \neq k$ oraz $\varphi_k(\varepsilon_k) = 1$, zatem $\varphi_k = x_k$ dla $k > 2$.

b) $\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_1 + \varepsilon_n$,

Mamy $\varphi_1(\varepsilon_1) = 1$, $\varphi_1(\varepsilon_i) = 0 - 1 = -1$ dla $i > 1$, zatem $\varphi_1 = x_1 - x_2 - \dots - x_n$. Dla $k > 1$ mamy $\varphi_k(\varepsilon_1) = 0$, $\varphi_k(\varepsilon_i) = 0 - 0 = 0$ dla $i \neq k$ oraz $\varphi_k(\varepsilon_k) = 1 - 0 = 1$, zatem mamy $\varepsilon_k = x_k$, dla $k > 1$.

c) $\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$.

Dla $k < n$ mamy dla $i > 1$ $\varphi_k(\varepsilon_i) = \varphi_k(\varepsilon_i + \dots + \varepsilon_i) - \varphi_k(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{i-1})$, co jest równe 0 dla $i \neq k, k+1$, równe 1 dla $i = k$ oraz równe -1 dla $i = k+1$. $\varphi_k(\varepsilon_1)$ jest równe 1 dla $k = 1$ i 0 w przeciwnym przypadku. Dostajemy więc, że dla $k < n$, $\varphi_k = x_k - x_{k+1}$. Mamy też po prostu $\varphi_n = x_n$.

6. (★) Niech A i B będą macierzami $n \times n$ takimi, że istnieją różne liczby rzeczywiste $t_0, \dots, t_n$ takie, że macierze $C_i = A + t_i B$, $i = 0, \dots, n$ są nilpotentne (t.j. $C_i^n = 0$). Udowodnij, że A i B są nilpotentne.

Zadanie pochodzi z IMC 1995. W takim razie $(A + tB)^n = A^n + P_1 t + P_2 t^2 + \dots + P_{n-1} t^{n-1} + B^n t^n$, gdzie macierze P_i nie zależą od t . Zatem jeśli $a, p_1, \dots, p_{n-1}, b$ to ich wyrazy w i -tym wierszu i j -tej kolumnie, to wielomian $a + p_1 t + \dots + p_{n-1} t^{n-1} + b t^n$ ma $n+1$ pierwiastków: $t_0, \dots, t_n$. Zatem skoro jest $\leq n$ stopnia, jest zerowy. Czyli $a = b = 0$, a zatem $A^n = B^n = 0$.