

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 19.

6 lub 10 grudnia 2019

Zadania

1. (·) Znaleźć macierz przekształcenia liniowego φ w bazach standardowych oraz w bazach $\mathcal{A}, \mathcal{B}$:

a) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2 + 4x_3, -3x_1 + 8x_3), \mathcal{A} = \{(3, 4, 1), (2, 3, 1), (5, 1, 1)\}, \mathcal{B} = \{(3, 1), (2, 1)\},$

b) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, \varphi((x, y)) = (3x + y, x + 5y, -x + 4y, 2x + y), \mathcal{A} = \{(3, 1), (4, 2)\}, \mathcal{B} = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 1, 2, 3), (0, 0, 0, 1)\},$

c) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi((x, y, z)) = (4x + y + z, 3x + 2y + z, 3x + 2y + z), \mathcal{A} = \{(3, 1, 1), (1, 0, 0), (5, 1, 0)\}, \mathcal{B} = \{(1, -1, 1), (4, 1, 1), (2, 0, 1)\}.$

2. Niech $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym mającym w bazach $\mathcal{A} = \{(3, 1, 1), (1, 0, 0), (5, 1, 0)\}, \mathcal{B} = \{(3, 4, 5), (4, 1, 1), (2, 0, 1)\}$ macierz

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć wzór na φ .

3. Niech $\varphi: V \rightarrow W, \psi: W \rightarrow Z$ będą przekształceniami liniowymi i niech $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ oraz

$$M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 w pewnych bazach $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ przestrzeni V, W, Z odpowiednio. Niech $\alpha \in V$ ma współrzędne w bazie $\mathcal{A}$ równe $1, -1, 3, -2$. Znaleźć współrzędne wektora $\varphi(\alpha)$ w bazie $\mathcal{B}$, współrzędne wektora $(\psi \circ \varphi)(\alpha)$ w bazie $\mathcal{C}$ oraz macierz $M(\psi \circ \varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$.

4. (·) Niech

$$\mathcal{A} = \{(-2, 1), (-1, 1)\},$$

$$\mathcal{B} = \{(3, 2), (2, -2)\},$$

$$\mathcal{C} = \{(1, 0, 1, 0), (0, 0, -1, 0),$$

$$(0, 2, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\}$$

oraz niech $\phi, \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będą zadane tak, iż:

(i) $\psi((x, y)) = (x + y, -x, -3y, -x + 2y),$

(ii) $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$

(iii) $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$

Oblicz:

a) $M(\text{id})_{st}^{\mathcal{C}},$

b) $M(\psi)_{st}^{st},$

c) $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{st},$

d) $M(\psi \circ (\varphi + 3\phi))_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}},$

e) współrzędne wektora $\psi(\varphi(v) + 3\phi(v))$ w bazie $\mathcal{C}$, jeśli wektor v ma w bazie $\mathcal{A}$ współrzędne $1, 1$.

5. Niech $\mathcal{A} = \{(5, 7, 1), (4, 0, 0), (6, 2, 5)\}, \mathcal{B} = \{(1, -1, 1), (0, 1, 6), (0, 1, 5)\}$. Znaleźć taką macierz $C \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, że dla każdego wektora $\alpha \in \mathbb{R}^3$ zachodzi: jeśli a_1, a_2, a_3 są współrzędnymi α w bazie $\mathcal{A}$, zaś b_1, b_2, b_3 są współrzędnymi tego wektora w bazie $\mathcal{B}$, to:

$$C \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

6. (★) Niech k i n będą liczbami naturalnymi, $k, n > 0$. Ciąg macierzy $n \times n$ $(A_1, \dots, A_k)$ nazywamy lubianym, jeśli dla każdego $1 \leq i \leq k$ $A_i \cdot A_i \neq \mathbf{0}$ (macierz samych zer), ale dla $i \neq j$, $A_i \cdot A_j = \mathbf{0}$. Udowodnij, że jeśli $(A_1, \dots, A_k)$ jest lubianym ciągiem macierzy, to $k \leq n$ oraz dla każdego n podaj przykład takiego ciągu dla $k = n$.