

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 19. – rozwiązania

6 lub 10 grudnia 2019

1. (·) Znaleźć macierz przekształcenia liniowego φ w bazach standardowych oraz w bazach $\mathcal{A}, \mathcal{B}$:

- a) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2 + 4x_3, -3x_1 + 8x_3), \mathcal{A} = \{(3, 4, 1), (2, 3, 1), (5, 1, 1)\}, \mathcal{B} = \{(3, 1), (2, 1)\},$
- b) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, \varphi((x, y)) = (3x + y, x + 5y, -x + 4y, 2x + y), \mathcal{A} = \{(3, 1), (4, 2)\},$
 $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 1, 2, 3), (0, 0, 0, 1)\},$
- c) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi((x, y, z)) = (4x + y + z, 3x + 2y + z, 3x + 2y + z), \mathcal{A} = \{(3, 1, 1), (1, 0, 0), (5, 1, 0)\}, \mathcal{B} = \{(1, -1, 1), (4, 1, 1), (2, 0, 1)\}.$

Rozwiązanie: To po kolei:

a) Oczywiście w bazach standardowych:

$$M(\varphi)_{\text{st}}^{\text{st}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Obliczamy na co przechodzą wektory z bazy $\mathcal{A}$: $\varphi((3, 4, 1)) = (3 - 4 + 4, -9 + 8) = (3, -1), \varphi((2, 3, 1)) = (2 - 3 + 4, -6 + 8) = (3, 2)$ oraz $\varphi((5, 1, 1)) = (5 - 1 + 4, -15 + 8) = (8, -7)$. Znajduje współrzędne wyliczonych wektorów w bazie $\mathcal{B}$: $(3, -1) = 5(3, 1) - 6(2, 1), (3, 2) = -(3, 1) + 3(2, 1)$ oraz $(8, -7) = 22(3, 1) - 29(2, 1)$, czyli:

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 22 \\ -6 & 3 & -29 \end{bmatrix}.$$

b) W bazach standardowych:

$$M(\varphi)_{\text{st}}^{\text{st}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \\ -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Obliczamy na co przechodzą wektory z bazy $\mathcal{A}$: $\varphi((3, 1)) = (9 + 1, 3 + 5, -3 + 4, 6 + 1) = (10, 8, 1, 7)$ i $\varphi((4, 2)) = (12 + 2, 4 + 10, -4 + 8, 8 + 2) = (14, 14, 4, 10)$. Sprawdzamy współrzędne tych wektorów w bazie $\mathcal{B}$ macierzowo:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 8 & 14 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 7 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_1} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 8 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -9 & -10 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 7 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_2, w_4 - w_2} \\ & \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -17 & -24 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{w_4 - 2w_3} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -17 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 33 & 44 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - w_3} \\ & \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 25 & 38 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -17 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 33 & 44 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Czyli:

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 25 & 38 \\ -17 & -24 \\ 33 & 44 \end{bmatrix}.$$

c) W bazach standardowych:

$$M(\varphi)_{\text{st}}^{\text{st}} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Obliczamy na co przechodzą wektory z bazy $\mathcal{A}$: $\varphi((3, 1, 1)) = (12 + 1 + 1, 9 + 2 + 1, 9 + 2 + 1) = (14, 12, 12)$, $\varphi((1, 0, 0)) = (4, 3, 3)$ oraz $\varphi((5, 1, 0)) = (20 + 1, 15 + 2, 15 + 2) = (21, 17, 17)$. Znajdujemy współrzędne tych wektorów w bazie $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 14 & 4 & 21 \\ -1 & 1 & 0 & 12 & 3 & 17 \\ 1 & 1 & 1 & 12 & 3 & 17 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 + w_1, w_3 - w_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 14 & 4 & 21 \\ 0 & 5 & 2 & 26 & 7 & 38 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & -1 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 \cdot 5} \\ & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 14 & 4 & 21 \\ 0 & 5 & 2 & 26 & 7 & 38 \\ 0 & -15 & -5 & -10 & -5 & -20 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 + 3w_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 14 & 4 & 21 \\ 0 & 5 & 2 & 26 & 7 & 38 \\ 0 & 0 & 1 & 68 & 16 & 94 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 2w_3, w_2 - 2w_3} \\ & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & -122 & -28 & -167 \\ 0 & 5 & 0 & -110 & -25 & -150 \\ 0 & 0 & 1 & 68 & 16 & 94 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{5}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & -122 & -28 & -167 \\ 0 & 1 & 0 & -22 & -5 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & 68 & 16 & 94 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 4w_2} \\ & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -34 & -8 & -47 \\ 0 & 1 & 0 & -22 & -5 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & 68 & 16 & 94 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Czyli:

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -34 & -8 & -47 \\ -22 & -5 & -30 \\ 68 & 16 & 94 \end{bmatrix}.$$

2. Niech $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym mającym w bazach $\mathcal{A} = \{(3, 1, 1), (1, 0, 0), (5, 1, 0)\}$, $\mathcal{B} = \{(3, 4, 5), (4, 1, 1), (2, 0, 1)\}$ macierz

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć wzór na φ .

Rozwiązanie: Znajdźmy współrzędne bazy standardowej w bazie $\mathcal{A}$:

$(1, 0, 0) = (0, 1, 0)_{\mathcal{A}}$, $(0, 1, 0) = (0, -5, 1)_{\mathcal{A}}$ oraz $(0, 0, 1) = (1, 2, -1)_{\mathcal{A}}$. Czyli:

$$M(\text{id})_{\text{st}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

tymczasem oczywiście:

$$M(\text{id})_{\mathcal{B}}^{\text{st}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Więc:

$$\begin{aligned} M(\varphi)_{\text{st}}^{\text{st}} &= M(\text{id})_{\mathcal{B}}^{\text{st}} \cdot M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\text{id})_{\text{st}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -19 & 3 \\ 5 & -6 & -3 \\ 7 & -11 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A więc $\varphi((x, y, z)) = (9x - 19y + 3z, 5x - 6y - 3z, 7x - 11y - 3z)$.

3. Niech $\varphi: V \rightarrow W, \psi: W \rightarrow Z$ będą przekształceniami liniowymi i niech $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ oraz

$M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ w pewnych bazach $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ przestrzeni V, W, Z odpowiednio. Niech $\alpha \in V$ ma współrzędne w bazie $\mathcal{A}$ równe $1, -1, 3, -2$. Znaleźć współrzędne wektora $\varphi(\alpha)$ w bazie $\mathcal{B}$, współrzędne wektora $(\psi \circ \varphi)(\alpha)$ w bazie $\mathcal{C}$ oraz macierz $M(\psi \circ \varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$.

Rozwiązanie:

$$M(\psi \circ \varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 13 & 18 \\ 9 & 2 & 13 & 25 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tymczasem $((\psi \circ \varphi)(\alpha))_{\mathcal{C}} = M(\psi \circ \varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} \cdot (\alpha)_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 13 & 18 \\ 9 & 2 & 13 & 25 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$. A więc szukane

współrzędne to $7, -4, -2$.

4. (·) Niech $\mathcal{A} = \{(-2, 1), (-1, 1)\}$, $\mathcal{B} = \{(3, 2), (2, -2)\}$, $\mathcal{C} = \{(1, 0, 1, 0), (0, 0, -1, 0), (0, 2, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\}$ oraz niech $\phi, \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będą zadane tak, iż:

(i) $\psi((x, y)) = (x + y, -x, -3y, -x + 2y)$,

(ii) $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$,

(iii) $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$,

Oblicz:

a) $M(\text{id})_{st}^{\mathcal{C}}$,

Widać, że:

- $(1, 0, 0, 0) = 1(1, 0, 1, 0) + 1(0, 0, -1, 0) + 0(0, 2, 0, 1) + 0(0, 1, 0, 1)$,
- $(0, 1, 0, 0) = 0(1, 0, 1, 0) + 0(0, 0, -1, 0) + 1(0, 2, 0, 1) - 1(0, 1, 0, 1)$,
- $(0, 0, 1, 0) = 0(1, 0, 1, 0) - 1(0, 0, -1, 0) + 0(0, 2, 0, 1) + 0(0, 1, 0, 1)$,
- $(0, 0, 0, 1) = 0(1, 0, 1, 0) + 0(0, 0, -1, 0) - 1(0, 2, 0, 1) + 2(0, 1, 0, 1)$.

A zatem:

$$M(\text{id})_{st}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) $M(\psi)_{st}^{st}$,

$$\text{Wypisujemy posługując się wzorem: } M(\psi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

c) $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{st}$,

$$\text{Mamy: } M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{st} = M(\text{id})_{\mathcal{B}}^{st} \cdot M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

d) $M(\psi \circ (\varphi + 3\phi))_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$,

Liczymy:

$$\begin{aligned} M(\psi \circ (\varphi + 3\phi))_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} &= M(\psi)_{st}^{\mathcal{C}} \cdot M(\varphi + 3\phi)_{\mathcal{A}}^{st} = M(\text{id})_{st}^{\mathcal{C}} \cdot M(\psi)_{st}^{st} \cdot (M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{st} + 3M(\phi)_{\mathcal{A}}^{st}) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right) = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 28 & -15 \\ -16 & 12 \\ 36 & -33 \end{bmatrix}$$

- e) współrzędne wektora $\psi(\varphi(v) + 3\phi(v))$ w bazie $\mathcal{C}$, jeśli wektor v ma w bazie $\mathcal{A}$ współrzędne 1, 1.
Szukane współrzędne, to

$$M(\psi \circ (\varphi + 3\phi))_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

a zatem 7, 13, -4, 3.

5. Niech $\mathcal{A} = \{(5, 7, 1), (4, 0, 0), (6, 2, 5)\}$, $\mathcal{B} = \{(1, -1, 1), (0, 1, 6), (0, 1, 5)\}$. Znaleźć taką macierz $C \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, że dla każdego wektora $\alpha \in \mathbb{R}^3$ zachodzi: jeśli a_1, a_2, a_3 są współrzędnymi α w bazie $\mathcal{A}$, zaś b_1, b_2, b_3 są współrzędnymi tego wektora w bazie $\mathcal{B}$, to:

$$C \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie: za C należy wziąć $M(\text{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$. Czyli w kolejnych kolumnach mają być zapisane współrzędne kolejnych wektorów z bazy $\mathcal{A}$ w bazie $\mathcal{B}$. Znajdźmy je:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 5 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 + w_1, w_3 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 12 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & 5 & -4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 6w_2} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 12 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -76 & -28 & -49 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 + w_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -64 & -24 & -41 \\ 0 & 0 & -1 & -76 & -28 & -49 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \cdot (-1)} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -64 & -24 & -41 \\ 0 & 0 & 1 & 76 & 28 & 49 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Czyli:

$$C = M(\text{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ -64 & -24 & -41 \\ 76 & 28 & 49 \end{bmatrix}$$

6. Niech $\mathcal{A} = \{(2, 1), (1, 1)\}$, $\mathcal{B} = \{(1, 3), (0, 1)\}$, $\mathcal{C} = \{(0, 1), (1, 4)\}$ i niech $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Znaleźć $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$.

Rozwiązanie: $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = M(\text{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, więc trzeba wyliczyć $M(\text{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, czyli znaleźć współrzędne wektorów z bazy $\mathcal{B}$ w bazie $\mathcal{C}$. Zróbmy to: $(1, 3) = -(0, 1) + (1, 4)$ oraz $(0, 1) = (0, 1) + 0(1, 4)$, czyli:

$$M(\text{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

a więc:

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = M(\text{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

7. (*) Niech k i n będą liczbami naturalnymi, $k, n > 0$. Ciąg macierzy $n \times n$ ($A_1, \dots, A_k$) nazywamy lubianym, jeśli dla każdego $1 \leq i \leq k$ $A_i \cdot A_i \neq \mathbf{0}$ (macierz samych zer), ale dla $i \neq j$, $A_i \cdot A_j = \mathbf{0}$. Udowodnij, że jeśli $(A_1, \dots, A_k)$ jest lubianym ciągiem macierzy, to $k \leq n$ oraz dla każdego n podaj przykład takiego ciągu dla $k = n$.

Zadanie pochodzi z IMC 2016. Ponieważ $A_i \cdot A_i \neq \mathbf{0}$ istnieje kolumna macierzy A_i , którą nazwijmy v_i , taki że $A_i v_i \neq \mathbf{0}$. Dowiedzimy, że $v_1, \dots, v_k$ są liniowo niezależne. Załóżmy zatem, że $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = \mathbf{0}$. Mamy jednak $A_i v_j = \mathbf{0}$ dla $i \neq j$. Zatem dla każdego i ,

$$\mathbf{0} = A_i(a_1 v_1 + \dots + a_k v_k) = a_i A_i v_i,$$

a zatem $a_i = 0$, czyli te wektory są liniowo niezależne. Zatem takich wektorów może być tylko $\leq n$, więc $k \leq n$.

Przykład dla $n = k$ to macierze $A_1, \dots, A_n$, zawierające same zera, za wyjątkiem 1 na i -tej pozycji na przekątnej.