

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 18.

5 grudnia 2019

Zadania

1. ($\cdot$) Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ oraz $B =$

$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Oblicz $A + 2B$. Znajdź taką macierz C , że $A + C = B$.

2. Oblicz $A \cdot B$ dla

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

3. Czy dla każdych macierzy $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ zachodzi $AB = BA$?

4. Wykazać, że dla każdych macierzy $A, A' \in M_{m \times n}(K)$, $B, B' \in M_{n \times k}(K)$ i $C \in M_{k \times l}(K)$ zachodzi $(AB)C = A(BC)$, $A(B+B') = AB + AB'$ oraz $(A+A')B = AB + A'B$.

5. Wykazać, że jeśli macierz $A \in M_{n \times n}(K)$ jest taka, że dla każdej macierzy $C \in M_{n \times n}(K)$, $AC = CA$, to $A = aI$, dla pewnego $a \in K$.

6. ($\cdot$) Przedstawić macierz

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 6 \\ 3 & 8 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

jako iloczyn macierzy operacji elementarnych.

7. Wykazać, że jeśli $A, B, C \in M_{n \times m}(K)$, gdzie A i B są macierzami schodkowymi zredukowanymi, otrzymanymi z C elementarnymi operacjami na wierszach, to $A = B$.

8. ($\star$) Niech $A \in M_{4 \times 2}(\mathbb{R})$ oraz $B \in M_{2 \times 4}(\mathbb{R})$ będą takie, że

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znajdź BA .

Praca domowa 6

1. Niech $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie zadane następująco $\varphi((1, -1)) = (1, 2, 1)$, $\varphi((-1, 0)) = (-1, 0, 1)$. Znaleźć wzór na 2φ .

2. Znaleźć bazy i wymiar jądra oraz obrazu φ z poprzedniego zadania.

3. Niech V_1, V_2, W będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej skończonego wymiaru V taką, że $V_2 \subseteq W$ oraz niech $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ będzie izomorfizmem. Udowodnij, że istnieje przekształcenie $\psi: V \rightarrow V$, że $\text{im } \psi = W$ oraz dla każdego $\alpha \in V_1$, $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$.

4. Niech $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi((x, y, z)) = (x - 3y + 2z, -3x + 9y - 7z)$. Rozstrzygnij, czy istnieją przekształcenia $\psi_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ oraz $\psi_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ takie, że $\varphi \circ \psi_1 = \text{id}$ i $\psi_2 \circ \varphi = \text{id}$. Uzasadnij swoje odpowiedzi. Jeśli ψ_1 lub ψ_2 istnieje, podaj wzór na takie przekształcenie.

5. Przedstawić macierz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ jako iloczyn macierzy $E_{ij}(a)$ (odpowiadających dodawaniu do wiersza innego wiersza przemnożonego przez liczbę).