

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 18. – rozwiązania

5 grudnia 2019

1. ($\cdot$) Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Oblicz $A + 2B$. Znajdź taką macierz C , że $A + C = B$.

$$A + 2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 6 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = B - A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Oblicz $A \cdot B$ dla

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

a)

$$AB =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & 10 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

b) $AB = \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) + 4 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 4 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 4 + 2 \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 0 & (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 2 & (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 4 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 17 & -7 \\ 4 & 9 & -4 \\ 8 & 10 & -4 \\ -4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

3. Czy dla każdych macierzy $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ zachodzi $AB = BA$?

Rozwiązanie: Nie. Np. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ale $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Wykazać, że dla każdych macierzy $A, A' \in M_{m \times n}(K)$, $B, B' \in M_{n \times k}(K)$ i $C \in M_{k \times l}(K)$ zachodzi $(AB)C = A(BC)$, $A(B + B') = AB + AB'$ oraz $(A + A')B = AB + A'B$.

Niech $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $B' = [b'_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$. Mamy $AB = [\sum_{a=1}^n a_{ia}b_{aj}]_{i,j}$, czyli $(AB)C = [\sum_{b=1}^k \sum_{a=1}^n a_{ia}b_{ab}c_{bj}]_{i,j}$. Podobnie $BC = [\sum_{a=1}^n b_{ia}c_{aj}]_{i,j}$, zatem $A(BC) = [\sum_{b=1}^k \sum_{a=1}^n a_{ia}b_{ab}c_{bj}]_{i,j}$, czyli $(AB)C = A(BC)$.

Mamy też $B+B' = [b_{ij}+b'_{ij}]$, zatem $A(B+B') = [\sum_{a=1}^n a_{ia}(b_{aj}+b'_{aj})]_{i,j}$, tymczasem $AB = [\sum_{a=1}^n a_{ia}b_{aj}]_{i,j}$ i $AB' = [\sum_{a=1}^n a_{ia}b'_{aj}]_{i,j}$, czyli $AB + AB' = [\sum_{a=1}^n a_{ia}(b_{aj} + b'_{aj})]_{i,j} = A(B + B')$. Ostatnią równość dowodzimy analogicznie.

5. Wykazać, że jeśli macierz $A \in M_{n \times n}(K)$ jest taka, że dla każdej macierzy $C \in M_{n \times n}(K)$, $AC = CA$, to $A = aI$, dla pewnego $a \in K$.

Rzeczywiście, mnożąc macierz A przez macierz C zawierającą same zera, poza elementem jeden w i -tym wierszu j -tej kolumnie z lewej (CA) dostanę macierz samych zer za wyjątkiem i -tego wiersza, który będzie taki sam, jak j -ty wiersz w macierzy A . Z drugiej strony, mnożąc z prawej przez tę macierz AC dostanę macierz samych zer, za wyjątkiem j -tej kolumny, gdzie dostanę i -tą kolumnę macierzy A . Co oznacza, że wszystkie wyrazy w j -tym wierszu macierzy A są zerami, za wyjątkiem j -tego wyrazu, który zgadza się z i -tym wyrazem w i -tej kolumnie. Po uwzględnieniu dowolności i oraz j , dostajemy, że macierz A ma zera poza przekątną, a wszystkie wyrazy na przekątnej muszą być równe.

6. ($\dots$) Przedstawić macierz

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 6 \\ 3 & 8 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

jako iloczyn macierzy operacji elementarnych.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 6 \\ 3 & 8 & 7 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 0 & 6 \\ 3 & 8 & 7 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 3w_1, w_3 - 2w_1, w_4 - 3w_1} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - 2w_2, w_3 - w_2, w_4 - 2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 \cdot (1/2)} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 + w_3, w_2 - w_3, w_4 + 3w_3} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 \cdot (1/13)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - 14w_4, w_2 + 7w_4, w_3 - 3w_4} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A zatem ta macierz to:

$$\begin{aligned} & T_{12}^4 E_{21}^4(3) E_{31}^4(2) E_{41}^4(3) E_{12}^4(2) E_{32}^4(1) E_{42}^4(2) \cdot \\ & \cdot I_4^4(2) T_{34}^4 E_{13}^4(-1) E_{23}^4(1) E_{43}^4(-3) I_4^4(13) E_{14}^4(14) E_{24}^4(-7) E_{34}^4(3). \end{aligned}$$

7. Wykazać, że jeśli $A, B, C \in M_{n \times m}(K)$, gdzie A i B są macierzami schodkowymi zredukowanymi, otrzymanymi z C elementarnymi operacjami na wierszach, to $A = B$.

Dowodzimy przez indukcję ze względu na liczbę kolumn. Dla $m = 1$ jest jasne. Załóżmy, że jest prawdą dla $n = k$. Niech będą odpowiednie dla $A, B, C \in M_{n \times (k+1)}(K)$ oraz niech A', B', C' będą jak A, B i C z

tym, że bez ostatniej kolumny. Wiadomo, że układy jednorodne: opisany macierzą B i opisany macierzą C są równoważne i mają te same rozwiązania. Z drugiej strony wiemy, że B' i C' są schodkowe zredukowane i powstają przy pomocy operacji na wierszach z macierzy A' (wystarczy wziąć te same operacje, co odpowiednio tworzą B i C). Zatem z założenia indukcyjnego $B' = C'$. Załóżmy dążąc do sprzeczności, że $B \neq C$. Zatem różnią się one w ostatniej kolumnie. Niech różnią się w i -tym wierszu. A zatem różnica i -tych wierszy B i C ma niezerowy wyraz na ostatnim miejscu i same zera wcześniej. Skoro układy równań związane z B i C (i A) mają ten sam zbiór rozwiązań, to każde rozwiązanie układu A spełnia równanie zdefiniowane przez i -ty rząd $B - C$, a zatem $x_{k+1} = 0$. A zatem w $k + 1$ kolumnie B oraz C musi pojawić się 1. Skoro jednak B' i C' są identyczne, to musi się to 1 pojawić w B i C jako schodek, a zatem w tym samym wierszu – pierwszym zerowym wierszu B' i C' . Ale poniżej i powyżej są już zera, skoro B i C są w postaci schodkowej zredukowanej, co daje sprzeczność z założeniem, że tak nie jest i kończy dowód.

8. (★) Niech $A \in M_{4 \times 2}(\mathbb{R})$ oraz $B \in M_{2 \times 4}(\mathbb{R})$ będą takie, że

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znajdź BA .

Zadanie z IMC 2004.

Zanotujmy $A = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ oraz $B = [ZW]$, gdzie $X, Y, Z, W \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Mamy zatem $XZ = I$, $XW = -I$, $YZ = -I$, $YW = I$. Zatem

$$BA = ZX + WY = 2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

bowiem $XZX = X$, czyli $ZX = I$ i analogicznie $WYW = W$, czyli $YW = I$, bowiem żadna z tych macierzy nie jest zerowa.