

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 17.

29 listopada lub 3 grudnia 2019

1. (·) Określić taki izomorfizm $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, że $\varphi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \varepsilon_1$. Czy istnieje izomorfizm $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ taki, że $\varphi(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\varphi(\varepsilon_2) = \varepsilon_3$ oraz $\varphi(\varepsilon_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$? Czy przekształcenie $\eta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ określone jako $\eta((x, y, z)) = (x + y, x - y, x + z)$ jest izomorfizmem? A przekształcenie $\eta': \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ określone jako $\eta'((x, y, z)) = (x + y, 2x + y + z, x + z)$.
2. (·) Dla jakich wartości parametru $r \in \mathbb{R}$, przekształcenie
 - a) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 + rx_3, 5x_1 + 3x_2 + 4x_3, x_1 + 2x_2 + 5x_3)$ jest monomorfizmem?
 - b) $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (4x_1 + x_2 + rx_3 + x_4, 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4, 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4)$ jest epimorfizmem?
 - c) $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (5x_1 - x_2 + rx_3 + 5x_4, 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + rx_4, 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4, x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 3x_4)$ jest izomorfizmem?
3. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową oraz niech V_1, V_2 będą jej podprzestrzeniami oraz $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ niech będzie izomorfizmem. Wykazać, że:
 - a) istnieje izomorfizm $\psi: V \rightarrow V$ taki, że dla każdego $v \in V_1$, $\psi(v) = \varphi(v)$.
 - b) jeśli W jest podprzestrzenią w V taką, że $W \cap V_1 = \{0\}$, to istnieje takie przekształcenie liniowe $\psi: V \rightarrow V$, że $\ker \psi = W$ oraz dla każdego $v \in V_1$, $\psi(v) = \varphi(v)$.
4. Dla każdego z poniższych przekształceń liniowych $\varphi: V \rightarrow W$ zbadać, czy istnieje przekształcenie $\psi_1: W \rightarrow V$, że $\psi_1 \circ \varphi = id$ oraz czy istnieje przekształcenie $\psi_2: W \rightarrow V$, że $\varphi \circ \psi_2 = id$. Jeśli istnieje, podać jego wzór.
 - a) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi((x, y, z)) = (3x - y + 2z, -x + 5y + 2z)$,
 - b) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi((a, b)) = (7a + b, 2a + 3b, a - b)$.
5. Niech V będzie przestrzenią liniową. Wykazać, że jest ona nieskończenie wymiarowa wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera V zawiera właściwą podprzestrzeń W izomorficzną z całą przestrzenią V .
6. Dla każdej pary liczb naturalnych dodatnich n, m obliczyć ile jest
 - a) monomorfizmów $(\mathbb{Z}_p)^n \rightarrow (\mathbb{Z}_p)^m$,
 - b) epimorfizmów $(\mathbb{Z}_p)^n \rightarrow (\mathbb{Z}_p)^m$,
 - c) izomorfizmów $(\mathbb{Z}_p)^n \rightarrow (\mathbb{Z}_p)^m$.
7. (★) Rozważmy macierz $n \times n$ do której wpisano po kolei (rzędami z lewej do prawej) liczby $1, \dots, n^2$. Następnie wybrano n elementów tej macierzy, tak że w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduje się dokładnie jedna liczba z wybranych. Te wybrane liczby zsumowano. Określ możliwe wyniki tej sumy.