

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 17. – rozwiązania

29 listopada lub 3 grudnia 2019

1. (·) Określić taki izomorfizm $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, że $\varphi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \varepsilon_1$. Czy istnieje izomorfizm $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ taki, że $\varphi(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\varphi(\varepsilon_2) = \varepsilon_3$ oraz $\varphi(\varepsilon_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$? Czy przekształcenie $\eta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ określone jako $\eta((x, y, z)) = (x + y, x - y, x + z)$ jest izomorfizmem? A przekształcenie $\eta': \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ określone jako $\eta'((x, y, z)) = (x + y, 2x + y + z, x + z)$.

Np.: $\varphi(x, y, z) = ((x + y)/2, y - x, z)$ przekształca bazę $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ na bazę

$$((1/2, -1, 0), (1/2, 1, 0), (0, 0, 1))$$

oraz wektor $(1, 1, 0)$ na $(1, 0, 0)$ zgodnie z wymaganiami z zadania.

Nie, bowiem $(1, 1, 0), (0, 0, 1)$ oraz $(1, 1, 1)$ nie stanowi bazy.

Tak, η jest izomorfizmem, bo $(1, 1, 1), (1, -1, 0), (0, 0, 1)$ to baza $\mathbb{R}^3$.

Nie, η' nie jest izomorfizmem, bo $(1, 2, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)$ nie jest bazą $\mathbb{R}^3$.

2. (·) Dla jakich wartości parametru $r \in \mathbb{R}$, przekształcenie

- a) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 + rx_3, 5x_1 + 3x_2 + 4x_3, x_1 + 2x_2 + 5x_3)$ jest monomorfizmem?

Trzeba sprawdzić, czy jądro jest jednoelementowe, czyli kiedy układ jest oznaczony.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & r \\ 5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - w_1, w_4 - 5w_1, w_5 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & r - 2 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 + 2w_2, w_4 - 2w_2, w_5 + w_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & r - 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A zatem φ jest mono wtedy i tylko wtedy, gdy $r \neq 8$.

- b) $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (4x_1 + x_2 + rx_3 + x_4, 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4, 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4)$ jest epimorfizmem?

Sprawdzamy dla jakich r układ wektorów rozpina całą przestrzeń $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ r & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ r & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - w_1, w_3 - rw_1, w_4 - 4w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 - r & 3 - r \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - (1 - r)w_2, w_4 + w_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 + r \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A zatem ten układ rozpina przestrzeń trójwymiarową, czyli całe $\mathbb{R}^3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $r \neq -1$ i wtedy przekształcenie to jest epi.

- c) $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (5x_1 - x_2 + rx_3 + 5x_4, 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + rx_4, 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4, x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 3x_4)$ jest izomorfizmem?

Skoro wymiary się zgadzają wystarczy, że sprawdzimy, czy to przekształcenie jest mono.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & -1 & r & 5 \\ 2 & -3 & -6 & r \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 7 & 3 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_4} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 3 \\ 2 & -3 & -6 & r \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & r & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - 3w_1, w_4 - 5w_1} \\ \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & -13 & -20 & r-6 \\ 0 & -13 & -20 & -5 \\ 0 & -26 & r-35 & -10 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & -13 & -20 & -5 \\ 0 & -13 & -20 & r-6 \\ 0 & -26 & r-35 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - w_2, w_4 - 2w_2} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & -13 & -20 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & r-1 \\ 0 & 0 & r+5 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Co oznacza, że jest to mono, dla $r \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 1\}$, i wtedy przekształcenie jest izomorfizmem.

3. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową oraz niech V_1, V_2 będą jej podprzestrzeniami oraz $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ niech będzie izomorfizmem. Wykazać, że:

- a) istnieje izomorfizm $\psi: V \rightarrow V$ taki, że dla każdego $v \in V_1$, $\psi(v) = \varphi(v)$.

Niech $v_1, \dots, v_k$ będzie bazą V_1 , oraz $v_1, \dots, v_k, \dots, v_n$ bazą V oraz niech $w_1 = \varphi(v_1), \dots, w_k = \varphi(v_k)$ będzie bazą V_2 , oraz $w_1, \dots, w_k, \dots, w_n$ bazą V (dwie bazy V mają tyle samo wektorów, zaś baza V_1 przechodzi na bazę V_2). Niech ψ będzie zdefiniowane na bazie $v_1, \dots, v_n$, jako $\psi(v_i) = w_i$ dla każdego $1 \leq i \leq n$, co spełnia warunki zadania.

- b) jeśli W jest podprzestrzenią w V taką, że $W \cap V_1 = \{0\}$, to istnieje takie przekształcenie liniowe $\psi: V \rightarrow V$, że $\ker \psi = W$ oraz dla każdego $v \in V_1$, $\psi(v) = \varphi(v)$.

Niech $v_1, \dots, v_k$ będzie bazą V_1 oraz $v_{k+1}, \dots, v_m$ bazą W . Wtedy (skoro $V_1 + W = V_1 \oplus W$), $v_1, \dots, v_m$ jest bazą $V_1 + W$, czyli układem liniowo niezależnym. Zatem można go uzupełnić do bazy V :

$$v_1, \dots, v_m, \dots, v_n.$$

Niech $w_i = \varphi(v_i)$ dla $i \leq k$. Podobnie jak w poprzednim podpunkcie, $w_1, \dots, w_k$ jest bazą V_2 . Zatem uzupełnijmy ją do bazy V : $w_1, \dots, w_k, \dots, w_n$. Niech $\psi: V \rightarrow V$ będzie zdefiniowane na bazie $v_1, \dots, v_n$ następująco:

$$\psi(v_i) = \begin{cases} w_i, & \text{dla } i \leq k \vee i > m \\ 0, & \text{dla } k < i \leq m \end{cases}.$$

Jasne jest wtedy, że $\psi(v) = \varphi(v)$ dla $v \in V_1$ oraz $W \subseteq \ker \psi$. Dowiedzmy, że $\ker \psi \subseteq W$. Niech więc $v \in V$ oraz $\psi(v) = 0$. Niech $a_1, \dots, a_n$ to współrzędne v w bazie $v_1, \dots, v_n$. Mamy, że

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(v) = \varphi(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = \varphi(a_1 v_1) + \dots + \varphi(a_n v_n) = \\ &= a_1 w_1 + \dots + a_k w_k + 0 + \dots + 0 + a_{m+1} w_{m+1} + \dots + a_n w_n. \end{aligned}$$

Ale w takim razie, skoro $w_1, \dots, w_n$ to baza, to $a_1 = \dots = a_k = a_{m+1} = \dots = a_n = 0$, zatem $v = a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_m v_m \in W$.

4. Dla każdego z poniższych przekształceń liniowych $\varphi: V \rightarrow W$ zbadać, czy istnieje przekształcenie $\psi_1: W \rightarrow V$, że $\psi_1 \circ \varphi = id$ oraz czy istnieje przekształcenie $\psi_2: W \rightarrow V$, że $\varphi \circ \psi_2 = id$. Jeśli istnieje, podać jego wzór.

- a) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi((x, y, z)) = (3x - y + 2z, -x + 5y + 2z)$,

Jasne jest, że jest to epimorfizm, ale nie monomorfizm. Zatem istnieje ψ_2 , ale nie ψ_1 . Musi być $\psi_2((3, -1)) = (1, 0, 0)$, $\psi_2((-1, 5)) = (0, 1, 0)$. Zatem $\psi_2((1, 0)) = (5/14, 1/14, 0)$ oraz $\psi_2((0, 1)) = (1/14, 3/14, 0)$.

b) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi((a, b)) = (7a + b, 2a + 3b, a - b)$.

Jasne jest, że to nie jest epimorfizm, jest natomiast mono, bo $(7, 2, 1), (1, 3, -1)$ są liniowo niezależne. Zatem jest ψ_1 , ale nie ma ψ_2 . Musi być $\psi_1((7, 2, 1)) = (1, 0)$ $\psi_1((1, 3, -1)) = (0, 1)$. Mogę ponadto przyjąć, że $\psi_1((0, 0, 1)) = (0, 0)$. Zatem $\psi_1((1, 0, 0)) = (3/19, -2/19)$ $\psi_1((0, 1, 0)) = (-1/19, 7/19)$.

5. Niech V będzie przestrzenią liniową. Wykazać, że jest ona nieskończenie wymiarowa wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera V zawiera właściwą podprzestrzeń W izomorficzną z całą przestrzenią V .

Rzeczywiście izomorfizm przestrzeni skończenie-wymiarowych zachowuje wymiar, więc jeśli V zawiera właściwą podprzestrzeń W izomorficzną z całą przestrzenią V to jest nieskończenie wymiarowa.

Jeśli V jest nieskończenie wymiarowa, to niech $\mathcal{B}$ będzie bazą, oraz niech $\{v_i, : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{B}$ będzie układem liniowo niezależnych wektorów. Wtedy niech $W = \text{lin}(\mathcal{B} \setminus \{v_0\})$ oraz niech $\phi: V \rightarrow W$ będzie zdefiniowane na bazie $\mathcal{B}$ jako $\phi(v) = v$ dla $v \in \mathcal{B} \setminus \{v_i : i \in \mathbb{N}\}$ oraz $\phi(v_i) = v_{i+1}$. Przekształcenie to przeprowadza bazę V na bazę W , więc jest izomorfizmem.

6. Dla każdej pary liczb naturalnych dodatnich n, m obliczyć ile jest

a) monomorfizmów $(\mathbb{Z}_p)^n \rightarrow (\mathbb{Z}_p)^m$,

Jeśli $m < n$ to zero. W przeciwnym przypadku, patrzymy na jakie wektory mają przejść wektory z bazy standardowej. Każdy kolejny musi być w innej przestrzeni niż rozpięte przez poprzednie. Wektorów w przestrzeni rozpiętej przez k liniowo niezależnych wektorów jest p^k . Zatem

$$(p^m - 1) \cdot (p^m - p) \cdot \dots \cdot (p^m - p^{n-1})$$

jest wszystkich wyborów.

b) epimorfizmów $(\mathbb{Z}_p)^n \rightarrow (\mathbb{Z}_p)^m$,

Jeśli $m > n$ to zero. W przeciwnym przypadku, wybieramy najpierw $m - n$ wektorów liniowo niezależnych tworzących jądro.

$$\frac{(p^n - 1) \cdot (p^n - p) \cdot \dots \cdot (p^n - p^{m-n-1})}{(m - n)!(p - 1)^{m-n}}$$

gdzie mianownik wynika z tego, że długość poszczególnych wektorów oraz ich kolejność nie czyni różnicy. Potem wybieramy pozostałe n wektorów, którym przyporządkowujemy kolejne wektory z bazy standardowej $(\mathbb{Z}_p)^m$. Czyli ostatecznie mamy

$$\frac{(p^n - 1) \cdot (p^n - p) \cdot \dots \cdot (p^n - p^{m-n-1}) \cdot (p^n - p^{m-n}) \cdot (p^n - p^{n-1})}{(m - n)!(p - 1)^{m-n}},$$

c) izomorfizmów $(\mathbb{Z}_p)^n \rightarrow (\mathbb{Z}_p)^m$.

Tyle, co w poprzednich punktach z tym, że dla $n = m$, czyli

$$(p^m - 1) \cdot (p^m - p) \cdot \dots \cdot (p^m - p^{m-1}).$$

7. (*) Rozważmy macierz $n \times n$ do której wpisano po kolei (rzędami z lewej do prawej) liczby $1, \dots, n^2$. Następnie wybrano n elementów tej macierzy, tak że w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduje się dokładnie jedna liczba z wybranych. Te wybrane liczby zsumowano. Określ możliwe wyniki tej sumy.

Wobec tego nasz wybór to $(j, \sigma(j))$, gdzie σ jest pewną permutacją $1, \dots, n$. Wyraz mu odpowiada $(j - 1)n + \sigma(j)$, więc suma to

$$\sum_{j=1}^n (j - 1)n + \sigma(j) = n \sum_{j=1}^n (j - 1) + \sum_{j=1}^n j = \frac{(n - 1)n^2}{2} + \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{n(n^2 + 1)}{2}.$$

I to jest jedyny możliwy wynik.