

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 16. – rozwiązania

28 lub 29 listopada 2019

1. $(\cdot)$ Wykazać, że jeśli $\varphi_1, \varphi_2: V \rightarrow W$ oraz $\psi: W \rightarrow Z$ są przekształceniami liniowymi, to $\psi \circ (\varphi_1 + \varphi_2) = \psi \circ \varphi_1 + \psi \circ \varphi_2$.
 Rzeczywiście, dla każdego $v \in V$, mamy $(\psi \circ (\varphi_1 + \varphi_2))(v) = \psi((\varphi_1 + \varphi_2)(v)) = \psi(\varphi_1(v) + \varphi_2(v)) = \psi(\varphi_1(v)) + \psi(\varphi_2(v)) = (\psi \circ \varphi_1)(v) + (\psi \circ \varphi_2)(v) = (\psi \circ \varphi_1 + \psi \circ \varphi_2)(v)$.
2. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad K oraz niech W_1 będzie podprzestrzenią przestrzeni W oraz V_1, V_2 niech będą podprzestrzeniami przestrzeni V . Wykazać, że następujące zbiory są podprzestrzeniami $L(V, W)$.
 - a) $X = \{\varphi \in L(V, W) : \forall v \in V_1 \varphi(v) \in W_1\}$,
 Rzeczywiście dla $\phi, \varphi \in X$, oraz dla każdego $v \in V_1$ mamy $(\phi + \varphi)(v) = \phi(v) + \varphi(v) \in W_1$, ponieważ W_1 jest podprzestrzenią. Zatem $\phi + \varphi \in X$. Podobnie dla $a \in K, v \in V_1, (a\varphi(v)) = a\varphi(v) \in W_1$, zatem $a\varphi \in X$.
 - b) $Y = \{\varphi \in L(V, W) : \forall v \in V_1 \varphi(v) \in W_1 \wedge \forall w \in V_2 \varphi(w) = \mathbf{0}\}$,
 Rzeczywiście dla $\phi, \varphi \in Y$, oraz dla każdego $v \in V_1$ mamy $(\phi + \varphi)(v) = \phi(v) + \varphi(v) \in W_1$, ponieważ W_1 jest podprzestrzenią oraz dla każdego $w \in V_2, (\phi + \varphi)(w) = \phi(w) + \varphi(w) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Zatem $\phi + \varphi \in Y$. Podobnie dla $a \in K, v \in V_1, (a\varphi(v)) = a\varphi(v) \in W_1$ oraz dla $w \in V_2, (a\varphi(w)) = a\varphi(w) = a\mathbf{0} = \mathbf{0}$, zatem $a\varphi \in Y$.
 - c) $Z = \{\varphi \in L(V, W) : \forall v \in V \varphi(v) \in W_1 \wedge \forall w \in V_1 \varphi(w) = \mathbf{0}\}$.
 Rzeczywiście dla $\phi, \varphi \in Z$, oraz dla każdego $v \in V$ mamy $(\phi + \varphi)(v) = \phi(v) + \varphi(v) \in W_1$, ponieważ W_1 jest podprzestrzenią oraz dla każdego $w \in V_1, (\phi + \varphi)(w) = \phi(w) + \varphi(w) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Zatem $\phi + \varphi \in Z$. Podobnie dla $a \in K, v \in V, (a\varphi(v)) = a\varphi(v) \in W_1$ oraz dla $w \in V_1, (a\varphi(w)) = a\varphi(w) = a\mathbf{0} = \mathbf{0}$, zatem $a\varphi \in Z$.
3. $(\cdot)$ Dla poniższych przekształceń znaleźć bazę i wymiar jego obrazu oraz bazę i wymiar jego jądra.
 - a) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi((x, y, z)) = (2x + y - 3z, x + 4y + 2z)$,
 Mamy: $\text{im } \varphi = \text{lin}(\varphi((1, 0, 0)), \varphi((0, 1, 0)), \varphi((0, 0, 1))) = \text{lin}((2, 1), (1, 4), (-3, 2)) = \mathbb{R}^2$, a zatem baza to $((1, 0), (0, 1))$, a wymiar wynosi 2.
 Za to $\ker \varphi$ to zbiór rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \end{cases}.$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot (-1/7)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - 4w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Więc bazą jest $((2, -1, 1))$ zaś wymiar to 1.

- b) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \varphi((x, y, z)) = (4x + 3y + 5z, x + 2y + z, 2x - y + 3z, 6x + 7y + 7z)$,
 Jak wyżej. Trzeba znaleźć najpierw bazę obrazu:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - w_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 3w_1, w_3 - 5w_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -10 & 10 \\ 0 & 6 & -12 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot (1/5)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & -12 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 6w_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A zatem $((1, -1, 3, -1), (0, 1, -2, 2))$ jest bazą $\text{im } \varphi$ oraz $\dim \text{im } \varphi = 2$.

Aby znaleźć bazę i wymiar $\ker \varphi$, rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 6 & 7 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 6 & 7 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 4w_1, w_3 - 2w_1, w_4 - 6w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - w_2, w_3 - w_2, w_4 - w_2} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem $((-7, 1, 5))$ jest bazą $\ker \varphi$, a $\dim \ker \varphi = 1$.

c) $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4, x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4, 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4)$.

Jak wyżej. Trzeba znaleźć najpierw bazę obrazu:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - w_2} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 6 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 + 6w_1, w_3 + 4w_1, w_4 + 7w_1} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -6 & 18 \\ 0 & -10 & 30 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot (-1/9)} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -6 & 18 \\ 0 & -10 & 30 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 + 6w_2, w_4 + 10w_2} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem baza to $((-1, -2, 4), (0, 1, -3))$, natomiast wymiar to 2.

Rozwiązujemy układ równań na jądro.

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 5w_1, w_3 - 7w_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -9 & -6 & -13 \\ 0 & -18 & -12 & -26 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -9 & -6 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot (1/9)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2/3 & 13/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - 3w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 13/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem baza to $((0, -2/3, 1, 0), (1/3, -13/9, 0, 1))$ oraz $\dim \ker \varphi = 2$.

4. W poniższych przypadkach sprawdzić, czy istnieje takie przekształcenie liniowe $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Jeśli tak, znaleźć przykład takiego przekształcenia podając jego wzór.

a) $\ker \varphi = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4: x - y + 6z + 2t = 0\}$, $\text{im } \varphi = \text{lin}((2, 3, 1))$,

Tak, $3 + 1 = 4$, więc się da. $\varphi((1, 1, 0, 0)) = (0, 0, 0)$, $\varphi((-6, 0, 1, 0)) = (0, 0, 0)$, $\varphi((-2, 0, 0, 1)) = (0, 0, 0)$ oraz $\varphi((1, 0, 0, 0)) = (2, 3, 1)$. Wtedy $\varphi((0, 1, 0, 0)) = (-2, -3, -1)$, $\varphi((0, 0, 1, 0)) = (12, 18, 6)$ oraz $\varphi((0, 0, 0, 1)) = (4, 6, 2)$, zatem

$$\varphi((x, y, z, t)) = (2x - 2y + 12z + 4t, 3x - 3y + 18z + 6t, x - y + 6z + 2t).$$

b) $\ker \varphi = \text{lin}((1, 0, 3, 3))$, $\text{im } \varphi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 4x + 5y - z = 0\}$,

Nie, $1 + 2 = 3 \neq 4$.

c) $\ker \varphi = \text{lin}((1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0))$, $\text{im} \varphi = \text{lin}((1, 1, 1), (1, 1, 0))$.

Tak, $2 + 2 = 4$. Mamy na przykład $\varphi((1, 1, 1, 1)) = (0, 0, 0)$, $\varphi((1, 1, 1, 0)) = (0, 0, 0)$, $\varphi((1, 0, 0, 0)) = (1, 1, 1)$ oraz $\varphi((0, 1, 0, 0)) = (1, 1, 0)$. Zatem $\varphi((0, 0, 1, 0)) = (-2, -2, -1)$ oraz $\varphi((0, 0, 0, 1)) = (0, 0, 0)$.
Zatem

$$\varphi((x, y, z, t)) = (x + y - 2z, x + y - 2z, x - z).$$

5. Niech $\varphi: V \rightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym, że $\varphi \circ \varphi = \varphi$. Wykazać, że istnieją podprzestrzenie V_1, V_2 przestrzeni V , że φ jest rzutem na V_1 wzdłuż V_2 .

Najpierw pokażemy, że $V = \text{im} \varphi \oplus \ker \varphi$. Rzeczywiście, jeśli $v \in \text{im} \varphi \cap \ker \varphi$, to dla pewnego $w \in V$, $v = \varphi(w)$ oraz $\varphi(v) = \mathbf{0}$, zatem $\varphi(\varphi(w)) = \mathbf{0}$, więc $\varphi(w) = \mathbf{0}$, ale $v = \varphi(w) = \mathbf{0}$ w takim razie. Wobec tego $\ker \varphi \cap \text{im} \varphi = \{\mathbf{0}\}$.

Skoro jednak $\dim(\text{im} \varphi + \ker \varphi) = \dim \text{im} \varphi + \dim \ker \varphi - 0 = \dim V$, to $\text{im} \varphi + \ker \varphi = V$, zatem rzeczywiście $V = \text{im} \varphi \oplus \ker \varphi$.

Niech ϕ będzie rzutem na $\text{im} \varphi$ wzdłuż $\ker \varphi$. Twierdzą, że $\phi = \varphi$. Rzeczywiście niech $v \in V$. W takim razie $v = v_1 + v_2$ dla pewnych $v_1 \in \text{im} \varphi$ oraz $v_2 \in \ker \varphi$. Ale wtedy:

$$\varphi(v) = \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \mathbf{0} = \varphi(v_1)$$

Oraz $\phi(v) = v_1$, ale $v_1 \in \text{im} \varphi$, więc istnieje $w \in V$, że $v_1 = \varphi(w)$, w takim razie $\varphi(v_1) = \varphi(\varphi(w)) = \varphi(w) = v_1$, czyli $\varphi(v) = \phi(v)$, zatem $\varphi = \phi$, co chcieliśmy udowodnić.

6. Niech $\varphi: V \rightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym, że $\varphi \circ \varphi = id$, gdzie V jest przestrzenią liniową nad ciałem K , w którym $1 + 1 \neq 0$. Wykazać, że istnieją podprzestrzenie V_1, V_2 przestrzeni V , że φ jest symetrią względem V_1 wzdłuż V_2 .

Skoro $1 + 1 \neq 0$, to istnieje odwrotność $1 + 1$, którą oznaczmy $1/2$. Rozważmy ψ zadane wzorem $\psi(v) = (v + \varphi(v))/2$. Zauważmy, że mamy $\psi(\psi(v)) = \psi((v + \varphi(v))/2) = \psi(v)/2 + \psi(\varphi(v))/2 = (v + \varphi(v))/4 + (\varphi(v) + \varphi(\varphi(v)))/4 = (v + \varphi(v))/4 + (\varphi(v) + v)/4 = (v + \varphi(v))/2 = \psi(v)$. Z poprzedniego zadania zatem wiemy, że ψ jest rzutem na $\text{im}(\psi)$ wzdłuż $\ker \psi$. Zatem jeśli $v = v_1 + v_2$ dla $v_1 \in \text{im}(\psi)$ oraz $v_2 \in \ker \psi$, mamy $\varphi(v) = 2\psi(v) - v = 2v_1 - (v_1 + v_2) = v_1 - v_2$, a zatem φ jest symetrią względem $\text{im}(\psi)$ wzdłuż $\ker \psi$.

7. Niech A, B będą dowolnymi zbiorami oraz K niech będzie ciałem. Niech $f: A \rightarrow B$ będzie pewną funkcją oraz $\phi: F(B, K) \rightarrow F(A, K)$ będzie przekształceniem zdefiniowanym jako $\phi(g) = g \circ f$. Udowodnić, że ϕ jest przekształceniem liniowym oraz znaleźć jego jądro i obraz.

Niech $a, b \in K$, $g, h \in F(B, K)$, $x \in A$. Mamy $(\phi(ag + bh))(x) = ((ag + bh) \circ f)(x) = (ag + bh)(f(x)) = a(g(f(x))) + b(h(f(x))) = (ag \circ f + bh \circ f)(x) = (a\phi(g) + b\phi(h))(x)$, zatem ϕ jest przekształceniem liniowym. $g \in \ker \phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in B$, $0 = \phi(g)(x) = g(f(x))$. To oznacza, że

$$\ker \phi = \{g \in F(B, K) : \forall y \in f[A] g(y) = 0\}.$$

Tymczasem $h \in \text{im} \phi$, wtedy i tylko wtedy, gdy h jest postaci $g \circ f$ dla pewnej funkcji $g: B \rightarrow K$. Zatem

$$\ker \phi = \{h \in F(A, K) : \forall x_1, x_2 \in A f(x_1) = f(x_2) \rightarrow h(x_1) = h(x_2)\}.$$

8. (*) Niech V, W będą podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{R}^{10}$ oraz $V \subseteq W$ i $\dim V = 3$, $\dim W = 6$. Niech

$$E = \{\varphi \in L(\mathbb{R}^{10}, \mathbb{R}^{10}) : \varphi[V] \subseteq V \wedge \varphi[W] \subseteq W\}$$

będzie podprzestrzenią $L(\mathbb{R}^{10}, \mathbb{R}^{10})$. Znajdź wymiar E .

Zadanie pochodzi z IMC 1998. Niech $\{v_1, v_2, \dots, v_{10}\}$ będzie bazą $\mathbb{R}^{10}$ taką, że $\{v_1, v_2, v_3\}$ jest bazą V , zaś $\{v_1, \dots, v_6\}$ jest bazą W . Zauważmy że dowolne przekształcenie z E jest kombinacją liniową przekształceń

$$\{\phi_{i,j} : (i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \cup \{4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{7, 8, 9, 10\} \times \{1, \dots, 10\}\}$$

gdzie $\phi_{i,j}(v_i) = v_j$ i $\phi_{i,j}(v_k) = \mathbf{0}$ dla $k \neq i$. Co więcej te przekształcenia są liniowo niezależne, oraz skoro:

$$|\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \cup \{4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{7, 8, 9, 10\} \times \{1, \dots, 10\}| = 9 + 18 + 40 = 67,$$

to $\dim E = 67$.