

Geometria z algebrą liniową I , 2019/2020

ćwiczenia 15.

22 i 26 listopada 2019

1. (·) Które z poniższych odwzorowań $\varphi: V \rightarrow W$ są przekształceniami liniowymi?

- a) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2, \varphi((x, y, z)) = (x + 3y - 1, 4x + 2y + 6),$
- b) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2, \varphi((x, y, z)) = (x + 3y - z, 4x + 2y + 6z),$
- c) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2, \varphi((x, y, z)) = (x + 3y - z, 4|x| + 2|y| + 6|z|),$

2. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ odwzorowanie $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zadane wzorem

$$\varphi((a, b)) = (a + b + (t^2 - 9)ab, 5a + 3(b - 1) + t)$$

jest przekształceniem liniowym?

3. Które z poniższych odwzorowań $\varphi: V \rightarrow W$ są przekształceniami liniowymi?

- a) $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), W = \mathbb{R}, \varphi(f) = 4f(5) - 5f(4).$
- b) $V = W = F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \varphi(f) = |f|,$
- c) V jest przestrzenią wszystkich funkcji różniczkowalnych rzeczywistych, $W = F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \varphi(f) = f'.$

4. (·) Znaleźć wzory na przekształcenia zadane podanymi warunkami.

- a) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi((1, 0, 1)) = (5, 1, 3), \varphi((0, 1, 1)) = (2, 3, 4), \varphi((1, 0, 0)) = (6, 7, 7),$
- b) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi((3, 1)) = (4, 5, -1), \varphi((7, 2)) = (-3, 0, 5).$

5. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad K . Wykresem funkcji $\varphi: V \rightarrow W$ nazywamy zbiór $G_\varphi = \{(v, \varphi(v)): v \in V\} \subseteq V \times W$. Wykazać, że φ jest przekształceniem liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy G_φ jest podprzestrzenią przestrzeni $V \times W$.

6. Niech $\varphi, \psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, będą przekształceniami liniowymi zadanymi następująco: $\varphi((1, 1, 1)) = (3, 7), \varphi((1, 1, 0)) = (2, 5), \varphi((1, 0, 0)) = (1, 6)$ oraz $\psi((2, 2, 1)) = (3, 3), \psi((2, 1, 0)) = (5, 0), \psi((2, 1, 1)) = (4, 2)$. Znaleźć wzór na przekształcenie $\varphi + \psi$ oraz na przekształcenie 5φ .

7. Niech ponadto $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie takie, że $\phi((1, 2)) = (1, 1)$ oraz $\phi((-1, -1)) = (1, 0)$. Znajdź wzór na przekształcenie $\phi \circ \varphi$.

8. Niech V, V', W, W' będą przestrzeniami liniowymi nad K . Wykazać, że dla dowolnego przekształcenia liniowego $\varphi: V' \rightarrow V$ odwzorowanie $\varphi_*: L(V, W) \rightarrow L(V', W)$ zdefiniowane jako $\varphi_*(\psi) = \psi \circ \varphi$ jest przekształceniem liniowym. Wykazać ponadto, że dla dowolnego przekształcenia liniowego $\varphi: W \rightarrow W'$ odwzorowanie $\varphi_*: L(V, W) \rightarrow L(V, W')$ zdefiniowane jako $\varphi_*(\psi) = \varphi \circ \psi$ jest przekształceniem liniowym.

9. (★) Niech $V, \mathbb{R}$ będą przestrzeniami liniowymi oraz niech $f, f_1, \dots, f_k$ będą przekształceniami liniowymi $V \rightarrow \mathbb{R}$ takimi, że dla każdego $v \in V$, jeśli $f_1(v) = \dots = f_k(v) = \mathbf{0}$, to $f(v) = \mathbf{0}$. Udowodnić, że f jest kombinacją liniową $f_1, \dots, f_k$.