

Geometria z algebrą liniową I , 2019/2020

ćwiczenia 15. – rozwiązania

22 i 26 listopada 2019

1. $(\cdot)$ Które z poniższych odwzorowań $\varphi: V \rightarrow W$ są przekształceniami liniowymi?

- a) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2, \varphi((x, y, z)) = (x + 3y - 1, 4x + 2y + 6)$,
- b) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2, \varphi((x, y, z)) = (x + 3y - z, 4x + 2y + 6z)$,
- c) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2, \varphi((x, y, z)) = (x + 3y - z, 4|x| + 2|y| + 6|z|)$,

Rozwiązanie:

- nie, bo $\varphi(2(0, 0, 0)) = \varphi((0, 0, 0)) = (-1, 6)$, ale $2\varphi((0, 0, 0)) = 2(-1, 6) = (-2, 12)$.
- tak, bo dla dowolnego $g \in \mathbb{R}$ oraz dowolnych wektorów $(a, b, c), (d, e, f)$ zachodzi

$$\begin{aligned}\varphi((a, b, c) + (d, e, f)) &= \varphi((a + d, b + e, c + f)) = \\ (a + d + 3b + 3e - c - f, 4a + 4d + 2b + 2e + 6c + 6f) &= (a + 3b - c, 4a + 2b + 6c) + (d + 3e - f, 4d + 2e + 6f) = \\ &= \varphi((a, b, c)) + \varphi((d, e, f))\end{aligned}$$

$$\text{oraz } \varphi(g(a, b, c))\varphi((ga, gb, gc)) = (ga + 3gb - gc, 4ga + 2gb + 6gc) = g(a + 3b - c, 4a + 2b + 6c) = g\varphi((a, b, c)).$$

- nie, bo $\varphi(-1(1, 0, 0)) = \varphi((-1, 0, 0)) = (-1, 4)$, ale $(-1)\varphi((1, 0, 0)) = (-1)(1, 4) = (-1, -4)$.

2. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ odwzorowanie $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zadane wzorem $\varphi((a, b)) = (a + b + (t^2 - 9)ab, 5a + 3(b - 1) + t)$ jest przekształceniem liniowym?

Rozwiązanie: Sprawdźmy warunek z mnożeniem dla 2 i wektora $(1, 1)$: $\varphi(2(1, 1)) = \varphi((2, 2)) = (-32 + 4t^2, 13 + t)$ oraz $2\varphi((1, 1)) = (-14 + 2t^2, 10 + 2t)$. Jeśli φ jest przekształceniem liniowym, to te dwa wektory są równe, czyli w szczególności $13 + t = 10 + 2t$, czyli $t = 3$. Łatwo sprawdzić, że jeśli $t = 3$ to to jest rzeczywiście przekształcenie liniowe.

3. Które z poniższych odwzorowań $\varphi: V \rightarrow W$ są przekształceniami liniowymi?

- a) $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), W = \mathbb{R}, \varphi(f) = 4f(5) - 5f(4)$.
- b) $V = W = F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \varphi(f) = |f|$,
- c) V jest przestrzenią wszystkich funkcji różniczkowalnych rzeczywistych, $W = F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \varphi(f) = f'$.

Rozwiązanie:

- tak, bo dla dowolnych funkcji $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz dowolnego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $\varphi((g + h)) = 4(g + h)(5) - 5(g + h)(4) = 4g(5) + 4h(5) - 5g(4) - 5h(4) = \varphi(g) + \varphi(h)$ oraz $\varphi(ag) = 4ag(5) - 5ag(4) = a\varphi(g)$.
- nie, niech $f(x) = 1$, wtedy $\varphi(-f) = f \neq -f = -\varphi(f)$.
- Tak, $(af + bg)' = af' + bg'$, co wiadomo z analizy.

4. $(\cdot)$ Znaleźć wzory na przekształcenia zadane podanymi warunkami.

- a) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi((1, 0, 1)) = (5, 1, 3), \varphi((0, 1, 1)) = (2, 3, 4), \varphi((1, 0, 0)) = (6, 7, 7)$,
- b) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi((3, 1)) = (4, 5, -1), \varphi((7, 2)) = (-3, 0, 5)$.

Rozwiązanie: Zadanie polega po pierwsze na znalezieniu współrzędnych wektorów z bazy standardowej w bazie użytej w zadaniu. W pierwszym przykładzie (oznaczmy $\alpha = (1, 0, 1), \beta = (0, 1, 1), \gamma = (1, 0, 0)$) widać od razu, że $(1, 0, 0) = \gamma$, $(0, 0, 1) = \alpha - \gamma$ oraz $(0, 1, 0) = -\alpha + \beta + \gamma$. Czyli $\varphi((1, 0, 0)) = (6, 7, 7)$, $\varphi((0, 1, 0)) = -(5, 1, 3) + (2, 3, 4) + (6, 7, 7) = (3, 9, 8)$ oraz $\varphi((0, 0, 1)) = (5, 1, 3) - (6, 7, 7) = (-1, -6, -4)$, a więc ostatecznie $\varphi((x, y, z)) = (6x + 3y - z, 7x + 9y - 6z, 7x + 8y - 4z)$.

W drugim przykładzie współrzędne wektorów $(1, 0), (0, 1)$ w bazie $\alpha = (3, 1), \beta = (7, 2)$ obliczymy standardowo sprowadzając macierz do postaci schodkowej (technika dwóch macierzy w jednej):

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 3w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - 2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Czyli $(1, 0) = -2\alpha + \beta$ oraz $(0, 1) = 7\alpha - 3\beta$. A więc $\varphi((1, 0)) = -2(4, 5, -1) + (-3, 0, 5) = (-11, -10, 7)$ oraz $\varphi((0, 1)) = 7(4, 5, -1) - 3(-3, 0, 5) = (37, 35, -22)$, a więc ostatecznie $\varphi((x, y)) = (-11x + 37y, -10x + 35y, 7x - 22y)$.

5. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad K . Wykresem funkcji $\varphi: V \rightarrow W$ nazywamy zbiór $G_\varphi = \{(v, \varphi(v)): v \in V\} \subseteq V \times W$. Wykazać, że φ jest przekształceniem liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy G_φ jest podprzestrzenią przestrzeni $V \times W$.

Rzeczywiście G_φ jest podprzestrzenią liniową, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $v, w \in V, a \in K$ mamy $(v, \varphi(v)) + (w, \varphi(w)) = (v + w, \varphi(v) + \varphi(w)) \in G_\varphi$ oraz $a(v, \varphi(v)) = (av, a\varphi(v)) \in G_\varphi$. Ale to zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(v) + \varphi(w) = \varphi(v + w)$ oraz $a\varphi(v) = \varphi(av)$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest przekształceniem liniowym.

6. Niech $\varphi, \psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, będą przekształceniami liniowymi zadanymi następująco: $\varphi((1, 1, 1)) = (3, 7)$, $\varphi((1, 1, 0)) = (2, 5)$, $\varphi((1, 0, 0)) = (1, 6)$ oraz $\psi((2, 2, 1)) = (3, 3)$, $\psi((2, 1, 0)) = (5, 0)$, $\psi((2, 1, 1)) = (4, 2)$. Znaleźć wzór na przekształcenie $\varphi + \psi$ oraz na przekształcenie 5φ .

Rozwiązanie: podobnie jak poprzednio wyliczmy wzory opisujące φ i ψ , znajdując współrzędne wektorów z bazy standardowej. Niech $\alpha = (1, 1, 1), \beta = (1, 1, 0), \gamma = (1, 0, 0)$, widać że $(1, 0, 0) = \gamma$, $(0, 1, 0) = \beta - \gamma$ oraz $(0, 0, 1) = \alpha - \beta$. A więc $\varphi((1, 0, 0)) = (1, 6)$, $\varphi((0, 1, 0)) = (2, 5) - (1, 6) = (1, -1)$ oraz $\varphi((0, 0, 1)) = (3, 7) - (2, 5) = (1, 2)$, czyli $\varphi((x, y, z)) = (x + y + z, 6x - y + 2z)$.

Szukamy wzoru na ψ , czyli najpierw współrzędnych wektorów $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ w bazie $\gamma = (2, 2, 1), \delta = (2, 1, 0), \epsilon = (2, 1, 1)$. Nie widać od razu, więc korzystamy z metody macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - 2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \cdot \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - w_3, w_2 + w_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Czyli $(1, 0, 0) = -\frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\epsilon}{2}$, $(0, 1, 0) = \gamma - \epsilon$ i $(0, 0, 1) = -\delta + \epsilon$, a więc: $\psi((1, 0, 0)) = -\frac{1}{2}(3, 3) + \frac{1}{2}(5, 0) + \frac{1}{2}(4, 2) = (3, -\frac{1}{2})$, $\psi((0, 1, 0)) = (3, 3) - (4, 2) = (-1, 1)$ oraz $\psi((0, 0, 1)) = -(5, 0) + (4, 2) = (-1, 2)$, a więc ostatecznie $\psi((x, y, z)) = (3x - y - z, -\frac{x}{2} + y + 2z)$.

A więc $(\varphi + \psi)((x, y, z)) = (x + y + z, 6x - y + 2z) + (3x - y - z, -\frac{x}{2} + y + 2z) = (4x, \frac{11x}{2} + 4z)$ oraz $5\varphi((x, y, z)) = 5(x + y + z, 6x - y + 2z) = (5x + 5y + 5z, 30x - 5y + 10z)$.

7. Niech ponadto $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie takie, że $\phi((1, 2)) = (1, 1)$ oraz $\phi((-1, -1)) = (1, 0)$. Znajdź wzór na przekształcenie $\phi \circ \varphi$.

Mamy: $\phi((1, 0)) = \phi((-1, 2) - 2(-1, -1)) = -(1, 1) - 2(1, 0) = (-3, -1)$ oraz $\phi((0, 1)) = \phi((1, 2) + (-1, -1)) = (1, 1) + (1, 0) = (2, 1)$. Zatem $\phi((a, b)) = (-3a + 2b, -a + b)$. W takim razie

$$(\phi \circ \varphi)(x, y, z) = \phi(\varphi(x, y, z)) = \phi((x + y + z, 6x - y + 2z)) = (9x - 5y + z, 5x - 2y + z).$$

8. Niech V, V', W, W' będą przestrzeniami liniowymi nad K . Wykazać, że dla dowolnego przekształcenia liniowego $\varphi: V' \rightarrow V$ odwzorowanie $\varphi^*: L(V, W) \rightarrow L(V', W)$ zdefiniowane jako $\varphi^*(\psi) = \psi \circ \varphi$ jest przekształceniem liniowym. Wykazać ponadto, że dla dowolnego przekształcenia liniowego $\varphi: W \rightarrow W'$ odwzorowanie $\varphi_*: L(V, W) \rightarrow L(V, W')$ zdefiniowane jako $\varphi_*(\psi) = \varphi \circ \psi$ jest przekształceniem liniowym.

Owszem mamy: $(\varphi^*(af + bg))(v) = (af + gb) \circ \varphi(v) = af(\varphi(v)) + bg(\varphi(v)) = (af \circ \varphi + bg \circ \varphi)(v) = (a\varphi^*(f) + b\varphi^*(g))(v)$. Analogicznie w przypadku φ_* .

9. (★) Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi oraz niech $f, f_1, \dots, f_k$ będą przekształceniami liniowymi $V \rightarrow \mathbb{R}$ takimi, że dla każdego $v \in V$, jeśli $f_1(v) = \dots = f_k(v) = 0$, to $f(v) = 0$. Udowodnić, że f jest kombinacją liniową $f_1, \dots, f_k$.

Zadanie pochodzi z IMC 1998. Niech $\{g_1, \dots, g_n\} \subseteq \{f_1, \dots, f_k\}$ będzie liniowo niezależnym układem rozpinającym $\{f_1, \dots, f_k\}$. Zatem dla każdego $v \in V$, jeśli $g_1(v) = \dots = g_n(v) = \mathbf{0}$, to $f(v) = \mathbf{0}$. Wobec ich liniowej niezależności, istnieje $a_i \in V$ takie, że $g_i(a_i) = 1$, ale $g_1(a_i) = \dots = g_{i-1}(a_i) = \dots = g_{i+1}(a_i) = \dots = g_n(a_i) = 0$ dla każdego $i = 1, \dots, n$ (dowód indukcyjny). Ale wtedy

$$g_i(x - g_1(x)a_1 - \dots - g_n(x)a_n) = f_i(x) - \sum_{j=1}^n g_j(x)g_i(a_j) = g_i(x) - g_i(x)g_i(a_i) = 0,$$

a zatem

$$f(x - g_1(x)a_1 - \dots - g_n(x)a_n) = 0$$

ale w takim razie

$$f(x) = f(a_1)g_1(x) + \dots + f(a_n)g_n(x),$$

zatem f jest kombinacją $\{g_1, \dots, g_n\}$, a co za tym idzie kombinacją $\{f_1, \dots, f_k\}$.