

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 14.

21 lub 22 listopada 2019

Zadania

1. Niech V będzie podprzestrzenią $\mathbb{R}^5$ opisaną układem równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 + ax_5 = 0 \end{cases}$$

- a) Wyznaczyć wymiar V w zależności od parametru a .
b) Dla $a = 0$ znaleźć bazę V_0 zawierającą wektor $(1, 1, 1, -2, 0)$.
2. Dane są wektory $\alpha = (5, 5, 2, 3)$, $\beta = (7, 7, 2, 0)$ oraz $\gamma = (2, 2, 0, 8) \in \mathbb{R}^4$.

- a) Opisać przestrzeń rozpiętą przez wektory α i β układem równań.
b) Znaleźć przykład podprzestrzeni $V \subseteq \mathbb{R}^4$ takiej, że $\dim V = 3$ oraz $\alpha, \beta \in V$, ale $\gamma \notin V$. Opisać V równaniem.
c) Traktujemy wektory α, β, γ jako wektory z $(\mathbb{Z}_{11})^4$. Czy istnieje przestrzeń $V \subseteq (\mathbb{Z}_{11})^4$ taka, że $\dim V = 3$ oraz $\alpha, \beta \in V$, ale $\gamma \notin V$.

3. Udowodnić, że układ wektorów $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V$ jest bazą wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wektor $\beta \in V$ można jednoznacznie zapisać w postaci $\beta = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i$, gdzie $a_1, \dots, a_n$ są skalarami.

4. Zadanie składa się z następujących krótkich podpunktów.

- a) Załóżmy, że $1+2i$ oraz $-1+2i$ są pierwiastkami wielomianu $w(x) \in \mathbb{R}[x]$. Czy stopień $w(x)$ może być równy 3?
b) Czy istnieją wektory $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^{10}$, takie że układ $\{\alpha - \beta, \beta - \gamma, \gamma - \alpha\}$ jest liniowo niezależny?
c) Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ będzie bazą przestrzeni liniowej V i niech $\beta \neq 0$ będzie niezerowym wektorem w V . Czy prawdą jest, że gdy β nie należy do $\text{lin}(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$, to $\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ jest bazą V ?
d) Znaleźć wektory $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^4$ spełniające równanie $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$ takie, że układ $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ jest bazą $\mathbb{R}^4$. Jeśli takich wektorów nie ma, to uzasadnić dlaczego.
e) Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru skończonego i niech $\alpha \neq 0$ będzie niezerowym wektorem V . Czy może istnieć jej podprzestrzeń $W \subseteq V$ tego samego wymiaru, co V , ale niezawierająca wektora α .
f) Niech W_1, W_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V oraz $\dim V = 5$, $\dim W_1 = \dim W_2 = 4$. Czy wymiar części wspólnej $W_1 \cap W_2$ może być równy 2?

5. Niech $S = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ oraz $D = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1\}$. Dana jest funkcja $f: \mathbb{C} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{C}$ zadana wzorem

$$f(z) = \frac{3z-1}{3-z}.$$

- a) Sprawdzić, że $f[S] = S$ oraz $f[D] = D$.

- b) Rozłożyć wielomian $x^5 - x \in \mathbb{C}[x]$ na wielomiany nierozkładalne.

- c) Rozłożyć wielomian $x^5 - x \in \mathbb{Z}_5[x]$ na wielomiany nierozkładalne.

6. Niech K będzie ciałem oraz $V \subseteq K^n$ będzie podprzestrzenią liniową opisaną układem równań liniowych $\mathcal{U} = \{f_k(x_1, \dots, x_n) = 0: k = 1, \dots, m\}$, gdzie $f_k(x_1, \dots, x_n) = a_{k,1}x_1 + \dots + a_{k,n}x_n$. Dana jest podprzestrzeń $W \subseteq K^n$ zawierająca V .

- a) Czy można W opisać podukładem układu $\mathcal{U}$?

- b) Załóżmy, że $W \neq K^n$. Udowodnić, że istnieją współczynniki $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$, nie wszystkie równe zero, takie że funkcja $g = \sum_{k=1}^m \lambda_k f_k$ zeruje się na W .

Praca domowa 5

1. Niech $w = 3 + i\sqrt{3}$ oraz $D = \{z \in \mathbb{C}: \text{Re}((1+i)z^3) \leq 0\}$. Przedstaw w postaci $a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ liczbę w^{101} , naszkicuj zbiór D o rozstrzygnięciu, czy $w \in D$.
2. Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ zbiór rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = s^2 + 2s \\ 2x_1 + 5x_2 + (4-s^2)x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + 9x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 2s(s+2) \end{cases}$$

jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^4$? Dla $s = 2$ znajdź rozwiązanie ogólne tego układu.

3. Niech $V = \text{lin}((4, -1, -5, 2), (1, 1, -1, -1), (1, 0, 0, -1), (2, 1, 3, -6))$. Znajdź wymiar V oraz bazę tej przestrzeni zawierającą wektor $(1, -1, 0, 0)$.

4. Niech $W \subseteq \mathbb{R}^4$ będzie przestrzenią rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Znajdź jej bazę i wymiar oraz rozstrzygnij dla jakich wartości $r \in \mathbb{R}$ układ wektorów $(1, 0, 0, -2), (-2, 0, 0, r)$ można dopełnić do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^4$ wektorami leżącymi w W .

5. Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n . Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $k \leq n+1$ istnieje w V układ liniowo zależny $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ taki, że każdy jego podukład właściwy jest liniowo niezależny.