

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

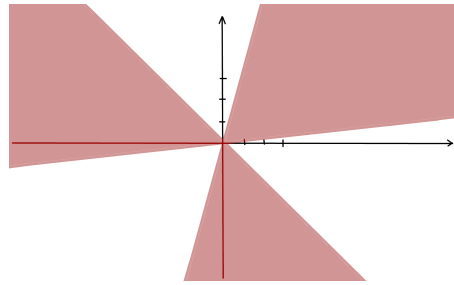
ćwiczenia 14. – rozwiązania pracy domowej 5

21 lub 22 listopada 2019

1. Niech $w = 3 + i\sqrt{3}$ oraz $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}((1+i)z^3) \leq 0\}$. Przedstaw w postaci $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ liczbę w^{101} , naszkicuj zbiór D o rozstrzygnij, czy $w \in D$.

Mamy $|w| = 2\sqrt{3}$ natomiast $\arg z = \pi/6$. Zatem $|w^{101}| = 2^{101}3^{50}\sqrt{3}$ i $\arg w^{101} = 5\pi/6$. Zatem $w^{101} = -2^{100}3^{51} + i2^{100}3^{50}\sqrt{3}$.

Mamy $\operatorname{Re}((1+i)z^3) \leq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi/2 \leq \arg(1+i)z^3 \leq 3\pi/2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi/4 \leq \arg z^3 \leq 5\pi/4$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi/12 \leq \arg z \leq 5\pi/12$ lub $3\pi/4 \leq \arg z \leq 13\pi/12$ lub $17\pi/12 \leq \arg z \leq 7\pi/4$. Skoro argument w leży w pierwszym z tych przedziałów, to $w \in D$. Zbiór D wygląda następująco



2. Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ zbiór rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = s^2 + 2s \\ 2x_1 + 5x_2 + (4 - s^2)x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + 9x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 2s(s + 2) \end{cases}$$

jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^4$? Dla $s = 2$ znajdź rozwiązanie ogólne tego układu.

Zauważmy, że jeśli $s = -2$ to mamy jednorodny układ równań liniowych, więc opisuje on podprzestrzeń liniową.

Jeśli natomiast $s \notin \{0, -2\}$, to wektor zerowy nie jest rozwiązaniem tego układu, zatem zbiór jego rozwiązań nie może być podprzestrzenią.

Dla $s = 0$, wektor $(-5, 2, 1, 4)$ jest rozwiązaniem tego układu, ale $2(-5, 2, 1, 4)$ już nie (nie spełnia drugiego równania). Nie jest to w takim razie podprzestrzeń liniowa.

Rozwiązujemy dla $s = 2$.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 8 \\ 2 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 9 & -6 & 2 & 16 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - 4w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 6 & -3 & -16 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & -16 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 2w_2, w_3 - w_2} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -15 & 7 & 40 \\ 0 & 1 & 6 & -3 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_1 - 7w_3, w_2 + w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -15 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Zatem rozwiązanie ogólne to

$$\begin{cases} x_1 = 40 + 15x_3 \\ x_2 = -16 - 6x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

co w postaci parametrycznej daje $(40 + 15x_3, -16 - 6x_3, x_3, 0)$.

3. Niech $V = \text{lin}((4, -1, -5, 2), (1, 1, -1, -1), (1, 0, 0, -1), (2, 1, 3, -6))$. Znajdź wymiar V oraz bazę tej przestrzeni zawierającą wektor $(1, -1, 0, 0)$.

Sprowadzamy do postaci schodkowej

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - w_1, w_3 - 4w_1, w_4 - 2w_1} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 + w_2, w_4 - w_2} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \cdot (-1/6)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 - 4w_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zatem $\dim V = 3$. Mamy $(1, -1, 0, 0) = (1, 0, 0, -1) - (0, 1, -1, 0) - (0, 0, 1, -1)$, więc zamieniając dowolny z otrzymanych wektorów na ten dany dostaniemy również bazę V , np.:

$$((1, -1, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 1, -1)).$$

4. Niech $W \subseteq \mathbb{R}^4$ będzie przestrzenią rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Znajdź jej bazę i wymiar oraz rozstrzygnij dla jakich wartości $r \in \mathbb{R}$ układ wektorów $(1, 0, 0, -2)$, $(-2, 0, 0, r)$ można dopełnić do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^4$ wektorami leżącymi w W .

Rozwiązujemy:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 3w_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - w_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

A zatem baza W to $((-3, 1, 0, 0), (6, 0, -5, 1))$, $\dim W = 2$. Aby była szansa, na uzupełnienie $(1, 0, 0, -2)$, $(-2, 0, 0, r)$ do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^4$, potrzeba dwóch liniowo niezależnych wektorów z W , a więc po pierwsze $(-2, 0, 0, r)$ nie może leżeć w W , po drugie musi być liniowo niezależny od $(1, 0, 0, -2)$. Z tego drugiego warunku mamy, że $r \neq 4$. Podstawiając do równań (nie mogą być spełnione) dostajemy $-2 - 6r \neq 0$, czyli $r \neq -1/3$ oraz $5r \neq 0$, czyli $r \neq 0$. Uzupełnienie jest możliwe, $r \neq 4$ oraz $r \neq -1/3$ lub $r \neq 0$, czyli po prostu dla $r \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$. Łatwo zweryfikować, że wtedy wektory $((-3, 1, 0, 0), (6, 0, -5, 1), (1, 0, 0, -2), (-2, 0, 0, r))$ stanowią rzeczywiście układ liniowo niezależny.

5. Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n . Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $k \leq n+1$ istnieje w V układ liniowo zależny $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ taki, że każdy jego podukład właściwy jest liniowo niezależny.

Przypadek $k = 1$ jest zdegenerowany i trywialny (bierzemy dowolny wektor niezerowy). Wiadomo, że w przestrzeni liniowej V wymiaru n istnieje podprzestrzeń liniowa W wymiaru l dla $0 \leq l \leq n$. Zatem niech $l = k - 1 \geq 1$ oraz niech $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ będzie bazą W . Niech $\alpha_k = \alpha_1 + \dots + \alpha_l$. Wtedy oczywiście $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ nie jest liniowo niezależny, ale dowolny jego właściwy podukład już jest liniowo niezależny. Rzeczywiście $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ jest liniowo niezależny, a dla każdego $i < k$, macierz o wierszach $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_k$ bardzo łatwo przy pomocy operacji na wierszach sprowadzić do macierzy o rzędach $\alpha_1, \dots, \alpha_l$. Wystarczy przesunąć ostatni wiersz na i -te miejsce i odjąć od niego wszystkie pozostałe wiersze. Dowodzi to liniowej niezależności tego podukładu. Każdy inny podukład jest podukładem układu, którego liniową niezależność już dowiedliśmy, więc też jest liniowo niezależny.