

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 13.

15 lub 19 listopada 2019

- Niech $v_1, \dots, v_n$ będzie układem wektorów w przestrzeni V . Wykazać, że:
 - układ ten jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $i = 1, \dots, n$ zachodzi
$$\text{lin}(v_i) \cap \text{lin}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n) = \{0\},$$
 - układ ten rozpina V wtedy i tylko wtedy, gdy $V = \text{lin}(v_1) + \dots + \text{lin}(v_n)$,
 - układ ten jest bazą V wtedy i tylko wtedy, gdy $V = \text{lin}(v_1) \oplus \dots \oplus \text{lin}(v_n)$.
- Dla każdej z poniższych podprzestrzeni W przestrzeni $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ znaleźć podprzestrzeń $W' \subseteq V$, że $V = W \oplus W'$.
 - $W = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(0) = 0\}$,
 - $W = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(1) = f(2) = 0\}$,
- Niech K będzie ciałem oraz $n \in \mathbb{N}$ i niech $V = M_{n \times n}(K)$. Rozpatrzmy następujące podzbiory w V . Niech

$$W_1 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall_{i > j} a_{ij} = 0\},$$

$$W_2 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall_{i \geq j} a_{ij} = 0\},$$

$$W_3 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall_{i < j} a_{ij} = 0\},$$

$$W_4 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall_{i \leq j} a_{ij} = 0\},$$

$$W_5 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall_{i \neq j} a_{ij} = 0\},$$

$$W_6 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall_{i,j} a_{ij} = a_{ji}\},$$

$$W_7 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall_{i,j} a_{ij} = -a_{ji}\}.$$

Wykazać, że podzbiory te są podprzestrzeniami liniowymi V . Znaleźć wszystkie takie pary i, j , że $V = W_i \oplus W_j$.

- $(\cdot)$ Niech V będzie przestrzenią liniową oraz $V = W \oplus W'$. Niech $\mathcal{A}$ będzie bazą przestrzeni W , a $\mathcal{A}'$ bazą przestrzeni W' . Udowodnij, że $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ jest bazą przestrzeni V .
- $(\cdot\cdot)$ Niech $V = \text{lin}((1, 2, 3, 1), (2, 1, 2, 3), (3, 3, 5, 4), (3, 0, 1, 5))$ oraz

$$W = \text{lin}((1, 2, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)).$$

Znaleźć bazy i wymiary przestrzeni V , W , $V + W$ i $V \cap W$.

- Czy można znaleźć bazę przestrzeni K^4 złożoną z wektorów spełniających równanie:
 - $x + y + z + t = 0$?
 - $x + y + z + t = 1$?
- Udowodnij, że jeśli V jest przestrzenią liniową nad ciałem K wymiaru n i W jest podprzestrzenią wymiaru k , to W jest częścią wspólną $n - k$ hiperpłaszczyzn (podprzestrzeni wymiaru $n - 1$) przestrzeni V .
- Niech $l \in \mathbb{N}$. Niech $V_1, \dots, V_l$ będą hiperpłaszczyznami w przestrzeni n -wymiarowej V . Udowodnij, że $\dim(V_1 \cap \dots \cap V_l) \geq n - l$.
- $(\star)$ Niech $n \in \mathbb{N}$. Wyznacz najmniejszy możliwy rząd macierzy $n \times n$, która ma zera na przekątnej oraz ściśle dodatnie wyrazy poza nią.