

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 13. – rozwiązania

15 lub 19 listopada 2019

1. Niech $v_1, \dots, v_n$ będzie układem wektorów w przestrzeni V . Wykazać, że:
- a) układ ten jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $i = 1, \dots, n$ zachodzi

$$\text{lin}(v_i) \cap \text{lin}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n) = \{0\},$$

Rzeczywiście, av_i dla $a \neq 0$ jest kombinacją liniową pozostałych wektorów wtedy i tylko wtedy, gdy v_i jest kombinacją pozostałych wektorów.

- b) układ ten rozpina V wtedy i tylko wtedy, gdy $V = \text{lin}(v_1) + \dots + \text{lin}(v_n)$,
Dokładnie oznacza to, że każdy wektor $v \in V$ jest postaci $a_1v_1 + \dots + a_nv_n$.
- c) układ ten jest bazą V wtedy i tylko wtedy, gdy $V = \text{lin}(v_1) \oplus \dots \oplus \text{lin}(v_n)$.
Jest bazą wtedy i tylko wtedy, gdy przedstawienie $a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ jest jednoznaczne, wtedy i tylko wtedy, gdy $V = \text{lin}(v_1) \oplus \dots \oplus \text{lin}(v_n)$.

2. Dla każdej z poniższych podprzestrzeni W przestrzeni $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ znaleźć podprzestrzeń $W' \subseteq V$, że $V = W \oplus W'$.

- a) $W = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(0) = 0\}$,
Niech $W' = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \forall x \neq 0 f(x) = 0\}$. Łatwo sprawdzić, że spełnia postawione warunki.
- b) $W = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(1) = f(2) = 0\}$,
Niech $W' = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} f(x) = 0\}$. Łatwo sprawdzić, że spełnia postawione warunki.

3. Niech K będzie ciałem oraz $n \in \mathbb{N}$ i niech $V = M_{n \times n}(K)$. Rozpatrzmy następujące podzbiory w V . Niech

$$W_1 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall i > j a_{ij} = 0\},$$

$$W_2 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall i \geq j a_{ij} = 0\},$$

$$W_3 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall i < j a_{ij} = 0\},$$

$$W_4 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall i \leq j a_{ij} = 0\},$$

$$W_5 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall i \neq j a_{ij} = 0\},$$

$$W_6 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall i, j a_{ij} = a_{ji}\},$$

$$W_7 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall i, j a_{ij} = -a_{ji}\}.$$

Wykazać, że podzbiory te są podprzestrzeniami liniowymi V . Znaleźć wszystkie takie pary i, j , że $V = W_i \oplus W_j$.

Te zbiory są podprzestrzeniami liniowymi ze względu na to, że dodawanie macierzy i mnożenie macierzy przez liczbę odbywa się po wyrazach.

Mamy $V = W_1 \oplus W_4 = W_2 \oplus W_3 = W_6 \oplus W_7$.

4. (·) Niech V będzie przestrzenią liniową oraz $V = W \oplus W'$. Niech $\mathcal{A}$ będzie bazą przestrzeni W , a $\mathcal{A}'$ bazą przestrzeni W' . Udowodnij, że $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ jest bazą przestrzeni V .

Jeśli $v \in V$, to $v = w + w'$, ale w jest kombinacją wektorów z $\mathcal{A}$, a w' jest kombinacją wektorów z $\mathcal{A}'$, więc V jest rozpinana przez $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$. Tymczasem $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ jest liniowo niezależne, bowiem gdyby dla nie wszystkich zerowych współczynników kombinacja liniowa takich wektorów dawałaby 0, to po przeniesieniu części tej kombinacji związanej z $\mathcal{A}'$ na drugą stronę równania, dostajemy, że $\text{lin}(\mathcal{A}) \cap \text{lin}(\mathcal{A}') \neq \{0\}$, co nie jest prawdą.

5. (·) Niech $V = \text{lin}((1, 2, 3, 1), (2, 1, 2, 3), (3, 3, 5, 4), (3, 0, 1, 5))$ oraz

$$W = \text{lin}((1, 2, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)).$$

Znaleźć bazy i wymiary przestrzeni V , W , $V + W$ i $V \cap W$.

Sprawdzamy do postaci schodkowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - 3w_1, w_4 - 3w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - w_2, w_4 - 2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem baza V to $((1, 2, 3, 1), (0, -3, -4, 1))$ i jest to przestrzeń wymiaru 2. Tymczasem baza W to $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ i jej wymiar to 3. Widać, że przestrzeń W to przestrzeń rozwiązań równania $x_3 = x_4$. Sprawdzamy, jakie kombinacje wektorów z bazy V spełniają to równanie i otrzymujemy, że $V \cap W = \text{lin}((5, 4, 7, 7))$ jest jednowymiarowa, natomiast $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) = 2 + 3 - 1 = 4$, więc $V + W = \mathbb{R}^4$ jest czterowymiarowa, więc baza $V + W$ to

$$((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)).$$

6. Czy można znaleźć bazę przestrzeni K^4 złożoną z wektorów spełniających równanie:

a) $x + y + z + t = 0$?

Nie, ponieważ kombinacja liniowa wektorów spełniających to równanie spełnia to równanie, a wektor $(1, 0, 0, 0) \in K^4$ nie spełnia tego równania.

b) $x + y + z + t = 1$?

Tak, $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ jest taką bazą.

7. Udowodnij, że jeśli V jest przestrzenią liniową nad ciałem K wymiaru n i W jest podprzestrzenią wymiaru k , to W jest częścią wspólną $n - k$ hiperpłaszczyzn (podprzestrzeni wymiaru $n - 1$) przestrzeni V .

Niech $(v_1, \dots, v_k)$ będzie bazą W , zaś po uzupełnieniu, niech $(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k})$ będzie bazą V . Zatem niech dla $i \in \{1, \dots, n - k\}$, $W_i = \text{lin}(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_{n-k})$. Zatem $\bigcap_{i=1}^{n-k} W_i = \text{lin}(v_1, \dots, v_k) = W$ (zawieranie $\bigcap_{i=1}^{n-k} W_i = \text{lin}(v_1, \dots, v_k)$ wynika z tego, że

$$(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k})$$

jest bazą, więc zapis wektora w postaci kombinacji tych wektorów jest jednoznaczny, skoro jednak $v \in W_i$ to współczynnik przy w_i musi być zerowy).

8. Niech $l \in \mathbb{N}$. Niech $V_1, \dots, V_l$ będą hiperpłaszczyznami w przestrzeni n -wymiarowej V . Udowodnij, że $\dim(V_1 \cap \dots \cap V_l) \geq n - l$.

Dowód indukcyjny. Dla $l = 1$ teza jest jasna. Niech $l = k$ oraz $V_1, \dots, V_{k+1}$ będą hiperpłaszczyznami w V . Niech $W = V_1 \cap \dots \cap V_k$. Z założenia indukcyjnego $\dim(W) \geq n - k$. Mamy zatem $\dim(W \cap V_{k+1}) \geq n - k + n - 1 - n = n - (k + 1)$, bowiem $\dim(W + V_{k+1}) \leq \dim W + \dim V_{k+1} + \dim(W \cap V_{k+1})$, ale $\dim(W + V_{k+1}) \leq n$.

9. (★) Niech $n \in \mathbb{N}$. Wyznacz najmniejszy możliwy rząd macierzy $n \times n$, która ma zera na przekątnej oraz ściśle dodatnie wyrazy poza nią.

Zadanie pochodzi z IMC 2012. Można łatwo zobaczyć, że dla $n = 1$ jedyna taka macierz ma rząd 0. Dla $n = 2$, zawsze oba wiersze będą liniowo niezależne, więc rząd wyjdzie 3. Dla $n \geq 3$ minimalny taki rząd to 3. Rzeczywiście, zawsze pierwsze trzy wiersze takiej macierzy są liniowo niezależne. Istnieje natomiast macierz $n \times n$, o opisywanych cechach i rzędzie 3. Jest to macierz $[a_{ij}]$ dla $a_{ij} = (i - j)^2 = i^2 - 2ij + j^2$. Zauważmy, że i -ty wiersz jest kombinacją zawsze tych samych trzech wektorów: $i^2(1, 1, \dots, 1) - 2i(1, 2, \dots, n) + (1^2, 2^2, \dots, n^2)$, a więc cała macierz ma rząd 3.