

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 12. – rozwiązania

12 lub 14 listopada 2019

1. Niech $F(X, K)$ będzie przestrzenią funkcji z niepustego zbioru X o wartościach w ciele K . Wykazać, że przestrzeń $F(X, K)$ jest skończenie wymiarowa wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór X jest skończony.

Jeśli zbiór X jest nieskończony, niech $\{x_0, x_1, \dots\} \subseteq X$, gdzie x_i są parami różne. Niech f_i będzie funkcją zdefiniowaną jako:

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ dla } x = x_i \\ 0 & , \text{ wpp.} \end{cases}$$

Oczywiście $\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$ jest układem liniowo niezależnym, więc wymiar $F(X, K)$ jest nieskończony.

Z drugiej strony, jeśli $\{x_0, x_1, \dots, x_k\} = X$, to niech również f_i będzie funkcją zdefiniowaną jako:

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ dla } x = x_i \\ 0 & , \text{ wpp.} \end{cases}$$

Wtedy układ $\{f_i : i \leq k\}$ stanowi bazę $F(X, K)$, więc przestrzeń ta jest k -wymiarowa.

2. Rozpatrzmy $\mathbb{R}$ jako przestrzeń nad $\mathbb{Q}$. Udowodnić, że jest ona nieskończenie wymiarowa.

Jeśli $(r_1, \dots, r_k)$ były bazą w $\mathbb{Q}$, oznacza to, że każda liczba rzeczywista jest postaci $q_1 r_1 + \dots + q_k r_k$, czyli mamy bijekcję pomiędzy $\mathbb{Q}^k \rightarrow \mathbb{R}$. Z WDM wiadomo, że taka bijekcja nie istnieje.

3. Niech K będzie ciałem i niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni K_c^∞ . Wykazać, że W jest podprzestrzenią skończenie wymiarową wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $(a_i) \in W$ zachodzi $a_i = 0$ dla wszystkich $i > m$.

Niech W będzie skończenie wymiarowa. Załóżmy przeciwnie, że nie ma takiej liczby $m \in \mathbb{N}$. Zatem istnieje ciąg liczb naturalnych (m_i) oraz ciąg wektorów $(w_i) \in W$ takich, że $w_i(m_i) \neq 0$, ale dla każdego $n > m_i$, $w_i(n) = 0$. Zauważmy, że układ ten jest liniowo niezależny, co prowadzi do sprzeczności.

Założmy zatem, że istnieje takie m . W takim razie możemy rozpatrzeć przestrzeń $W' \subseteq K^m$ złożoną z tych samych wektorów co W ale obciętych tylko do pierwszych m pozycji. Zauważmy, że baza przestrzeni W' daje bazę przestrzeni W , jeśli każdy z wektorów przedłużyć do nieskończonego ciągu samymi zerami. Ale W' jest skończenie wymiarowa, jako podprzestrzeń przestrzeni skończenie wymiarowej.

4. Niech I będzie dowolnym przedziałem w $\mathbb{R}$. Rozstrzygnąć, czy ciąg wektorów

$$(1, \cos x, \sin x, 2 \cos^2 x, 2 \sin^2 x, 3 \cos^3 x, 3 \sin^3 x \dots)$$

jest liniowo niezależny w przestrzeni $C(I)$.

Nie jest, $\frac{2 \sin^2 x}{2} + \frac{2 \cos^2 x}{2} - 1 = 0$.

5. (·) Niech V, W będzie podprzestrzeniami $\mathbb{R}^4$. Znaleźć bazy i wymiary $V + W$ oraz $V \cap W$ dla

a) $V = \text{lin}((2, 1, 3, 4), (3, 9, 3, 9), (-1, 7, -3, 1))$, $W = \text{lin}((1, -3, 3, 0), (2, 5, 3, 5), (1, 8, 0, 5))$,

Znajdujemy bazy tych przestrzeni:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 3 & 9 \\ -1 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 3 & 9 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \cdot (1/3)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 + w_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 10 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 + 2w_2, w_1 - w_2} \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A zatem baza V to $((1, 8, 0, 5), (0, -5, 1, -2))$.

W drugim przypadku:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 11 & -3 & 5 \\ 0 & 11 & -3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - w_2, w_1 + w_2} \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & 11 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A zatem baza W to $((1, 8, 0, 5), (0, 11, -3, 5))$. W obu bazach pierwszy wektor jest taki sam, ale pozostałe dwa są liniowo niezależne. W takim razie baza $V + W$ to $((1, 8, 0, 5), (0, 11, -3, 5), (0, -5, 1, -2))$. Wobec tego $\dim V + W = 3$, a zatem $\dim V \cap W = -\dim(V + W) + \dim V + \dim W = -3 + 2 + 2 = 1$. Zatem szukamy jednego niezerowego wektora, który jest zarówno w V , jak i w W . Jest to właśnie $(1, 8, 0, 5)$ – i to jest baza $V \cap W$.

b) $V = \text{lin}((3, 2, 1, 0), (4, 3, 0, 2), (1, 2, 2, -3))$, natomiast W jest opisane układem równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

Opiszmy układem równań także przestrzeń V :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 & | & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & | & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 4w_1, w_3 - 3w_1} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & -5 & -8 & 14 & | & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 9 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - w_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 & | & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 5 & | & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 9 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 + 2w_2, w_3 - 4w_2} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 7 & | & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -11 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot (-1), w_3 \cdot (1/7)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 7 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -11/7 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 + 4w_3, w_2 - 3w_3} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5/7 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/7 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -11/7 & | & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zatem baza przestrzeni współczynników to $(-5, 2, 11, 7)$ i V opisane jest równaniem:

$$-5x_1 + 2x_2 + 11x_3 + 7x_4 = 0.$$

Przy okazji zauważmy, że $\dim V = 3$.

Zatem $V \cap W$ jest opisane układem równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ -5x_1 + 2x_2 + 11x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

który rozwiązujemy:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & | & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 5 & | & 0 \\ -5 & 2 & 11 & 7 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 3w_1, w_3 + 5w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 12 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 + 2w_2, w_3 + 12w_2} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 5 & | & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 54 & 36 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot (-1), w_3 \cdot (1/54)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 5 & | & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - 7w_3, w_2 + 4w_3} \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 \end{array} \right]$$

Zatem baza $V \cap W$ to $(-1, -2, -2, 3)$ oraz $\dim(V \cap W) = 1$. Zatem $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) = 3 + 2 - 1 = 4$, czyli $V + W = \mathbb{R}^4$, zatem baza tej przestrzeni to na przykład $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$.

6. Niech $V \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie przestrzenią rozwiązań równania $x + 2y - z = 0$, zaś

$$W = \text{lin}((2, -t + 2, 4), (2s, 6, -8)).$$

Dla jakich wartości parametru $s, t \in \mathbb{R}$

- a) $V \cap W = \{0\}$?

Wtedy żaden z wektorów rozpinających W nie może leżeć na V , zatem $\dim V + W = 3$. Ale też $0 = \dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim(V + W) = 2 + \dim W - 3$, czyli $\dim W = 1$, zatem wektory $(2, -t + 2, 4), (2s, 6, -8)$ muszą być liniowo zależne, co stanie się wtedy i tylko wtedy, gdy $s = -2, t = 5$. Wtedy też oczywiście dowolna ich niezerowa kombinacja nie spełnia równania na V .

- b) $V + W = \mathbb{R}^3$?

Skoro $\dim V = 2$, niezbędne jest, żeby co najmniej jeden z tych wektorów nie spełniał równań. Czyli $t \neq 1$ lub $s \neq -4$.

- c) $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$?

Znów, zachodzi to wtedy, gdy poprzednie dwie rzeczy zachodzą naraz, czyli gdy $s = -2, t = 5$.

7. (..) Dla każdej z poniższych podprzestrzeni $W \subseteq \mathbb{R}^5$ znaleźć podprzestrzeń $V \subseteq \mathbb{R}^5$ taką, że $\mathbb{R}^5 = W \oplus V$.

- a) $W = \text{lin}((1, 2, 4, 5, 1), (6, 9, 7, 5, 5), (4, 5, -1, -5, 3))$.

Znajdujemy bazę W :

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 6 & 9 & 7 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & -1 & -5 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 6w_1, w_3 - 4w_1} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -17 & -25 & -1 \\ 0 & -3 & -17 & -25 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_2} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -17 & -25 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

A zatem wystarczy wziąć $V = \text{lin}((0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1))$.

- b) W jest przestrzenią rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}.$$

Rozwiązujemy ten układ równań (wystarczy, że dowiemy się które zmienne będą parametrami w rozwiązaniu ogólnym), zapisuję układ w kolejności x_5, x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$\left[\begin{array}{ccccc} -1 & 5 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 4 & -5 & 5 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 + 2w_1, w_3 + 4w_1} \left[\begin{array}{ccccc} -1 & 5 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 14 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 24 & -9 & 13 & -7 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_2} \left[\begin{array}{ccccc} -1 & 5 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 14 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 10 & -10 & 10 & 0 \end{array} \right]$$

Zatem wystarczy wziąć te wektory z bazy standardowej, które mają jedynki w miejscu bazowych zmiennych, czyli $V = \text{lin}((1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1))$.

8. (★) Wyznaczyć wszystkie pary (a, b) liczb wymiernych takich, że $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{4 + \sqrt{7}}$.

Przekształcamy tę równość

$$a + b + 2\sqrt{ab} = 4 + \sqrt{7}$$

$$4ab = 16 + a^2 + b^2 + 2ab - 8a - 8b + 7 + 2\sqrt{7}(4 - a - b)$$

$$-a^2 - b^2 - 23 - 6ab + 8a + 8b = 2\sqrt{7}(4 - a - b)$$

Zatem, aby lewa i prawa strona musi być równa 0. Zatem $a + b = 4$ oraz $4ab - (4 - a - b)^2 - 7 = 0$, czyli $4ab = 7$, ale zauważmy, że $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 16 - 7 = 9$, zatem $a - b = \pm 3$. Zatem dostajemy pary $(7/2, 1/2)$ oraz $(1/2, 7/2)$.