

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 12. – rozwiązania pracy domowej 4

12 lub 14 listopada 2019

1. Niech bazą przestrzeni W będzie $(-1, 0, 1, 0, 0), (0, -1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 0, 1)$. Zbadać, czy można uzupełnić układ wektorów $(4, 3, 2, -3, -6), (1, 1, -4, -1, 3), (2, 0, 3, 0, -5)$ do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^5$ wektorami z przestrzeni W .
Trzeba sprawdzić wymiar przestrzeni $V + \text{lin}((4, 3, 2, -3, -6), (1, 1, -4, -1, 3), (2, 0, 3, 0, -5))$.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & -4 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - w_1, w_4 + 4w_1, w_5 + w_1, w_6 + 2w_1} \\ & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 + 3w_2, w_5 + w_2} \\ & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 + 6w_3, w_5 - 3w_3, w_6 + 5w_3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A zatem wymiar tej przestrzeni to 3, więc odpowiedź na pytanie z zadania jest negatywna.

2. Niech V będzie przestrzenią opisaną układem równań:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

zaś W niech będzie opisana układem równań:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 10x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni $V \cap W$.

Trzeba rozwiązać układ złożony ze wszystkich czterech równań:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 10 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & 10 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 + 3w_1, w_3 + 2w_1, w_4 + 2w_1}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & -13 & 10 \\ 0 & 5 & -11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - w_2, w_1 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & -13 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \cdot (1/2)} \\
& \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & -13 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - 5w_3, w_2 + 13w_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot (1/5)} \\
& \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 + 2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Zatem rozwiązanie ogólne to $(-x_4, -2x_4, 0, x_4)$, a zatem $V \cap W = \text{lin}((-1, -2, 0, 1))$ oraz $\dim V \cap W = 1$.

3. Dla V i W zdefiniowanych w poprzednim zadaniu, znajdź bazę i wymiar przestrzeni $V + W$ oraz rozstrzygnij, czy $V + W = V \oplus W$.

Zauważamy, że baza W to $((2, 1, 0, 0), (-5, 0, 1, 0), (3, 0, 0, 1))$, natomiast $\dim V = 2$, skoro $\dim V \cap W = 1$, to $\dim V + W = 3 + 2 - 1 = 4$, czyli $V + W = \mathbb{R}^4$. Skoro $\dim V \cap W = 1$, to nie jest prawdą, że $V + W = V \oplus W$.

4. Niech $W = \text{lin}((1, 3, 0, 4, 2), (5, 5, 3, 2, 1)) + \text{lin}((1, 0, 1, 0, 5), (5, 2, 4, -2, 4))$. Znajdź podprzestrzeń $V \subseteq \mathbb{R}^5$ taką, że $\mathbb{R}^5 = W \oplus V$.

Znajdujemy bazę W :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 5w_1, w_3 - w_1, w_4 - 5w_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -10 & 3 & -18 & -9 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & -13 & 4 & -22 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \\
& \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & -10 & 3 & -18 & -9 \\ 0 & -13 & 4 & -22 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 3w_2, w_4 - 4w_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & -18 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & -18 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 - w_3} \\
& \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Zatem baza to $((1, 3, 0, 4, 2), (0, -3, 1, -4, 3), (0, -1, 0, -6, -18))$, więc wystarczy wziąć

$$V = \text{lin}((0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1))$$

5. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K . Wykazać, że $\dim V = \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje w V podprzestrzeń wymiaru n .

Oczywiście, jeśli $\dim V = n$, to nie zawiera podprzestrzeni o wymiarze $n + 1$.

Jeśli $\dim V$ jest nieskończony, to niech $\mathcal{B}$ będzie bazą V . Skoro $\mathcal{B}$ jest zbiorem nieskończonym, to niech $B \subseteq \mathcal{B}$ oraz $|B| = n$. Zatem $\text{lin}(B)$ jest wymiaru n oraz jest podprzestrzenią przestrzeni V .