

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 9. – rozwiązania

31 października lub 5 listopada 2019

1. Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni liniowej $\text{lin}((1, 2, 0, 1), (2, 1, 3, 3), (0, -3, 3, 1), (3, 4, 3, 4))$.

Znajdujemy sprowadzając do postaci schodkowej:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right] &\xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_4 - 3w_1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_4 \cdot 3} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 9 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_2, w_4 - 2w_3} \\ &\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_4} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Czyli baza to $(1, 2, 0, 1), (0, -3, 3, 1), (0, 0, 3, 1)$ oraz wymiar to 3.

2. Znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni opisanej następującym układem równań.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Znajdujemy rozwiązanie ogólne układu równań:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - 3w_1} \\ &\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{-1}{5}} \\ &\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 2w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Czyli rozwiązanie ogólne to $(-\frac{3}{5}x_3, -\frac{1}{5}x_3 - x_4, x_3, x_4)$, więc są dwa wymiary, a baza to np.: $(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, 1, 0), (0, -1, 0, 1)$.

3. (·) Opisać przestrzeń $\text{lin}((1, 2, 1, 3), (2, 5, 2, 7), (1, 3, 1, 4))$ układem równań liniowych.

Rozwiązujemy układ równań:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_2, w_1 - 2w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Więc rozwiązaniem ogólnym jest $(-c - d, -d, c, d)$, czyli bazą podprzestrzeni rozwiązań jest $(-1, 0, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)$. To oznacza, że wskazaną podprzestrzeń opisuje układ równań:

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

4. Dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$ podprzestrzeń $\text{lin}((1, 2, 1), (2, 5, 3), (1, 3, t))$ daje się opisać jednym niezerowym równaniem? Znaleźć to równanie.

Rozwiązujemy układ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & t & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t-1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 \end{bmatrix}$$

Aby było jedno równanie przestrzeni rozwiązań tego układu musi być jednowymiarowa musi istnieć niezerowe rozwiązanie. Więc ostatnia kolumna musi nie mieć schodka, czyli $t = 2$. A więc dalej rachujemy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - 2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Czyli rozwiązanie ogólne to $(c, -c, c)$, czyli przestrzeń rozwiązań jest jednowymiarowa zgodnie z życzeniem i jedyny wektor wazowy to np.: $(1, -1, 1)$, co oznacza szukane równanie to:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

5. Znaleźć współrzędne wektora $(1, 8, 10, 10)$ w bazie $(1, 2, 3, 1), (2, 1, 3, 3), (-1, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 2)$

Rozwiązujemy układ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - 3w_1, w_4 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 + 3w_2, w_4 + 3w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 34 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 33 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 33 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 34 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 - w_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \cdot \frac{1}{3}, w_1 - 2w_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 & -17 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 + w_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 + 2w_4, w_2 - 2w_4, w_3 - 2w_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Czyli współrzędne to $-4, 7, 9, 1$ i rzeczywiście $-4(1, 2, 3, 1) + 7(2, 1, 3, 3) + 9(-1, 1, 0, -1) + (0, 0, 1, 2) = (1, 8, 10, 10)$.

6. Rozpatrzmy następujące wektory przestrzeni $\mathbb{R}^3$: $\alpha_1 = (3, 2, 1)$, $\alpha_2 = (7, 3, 1)$, $\alpha_3 = (4, 2, 1)$, $\beta_1 = (0, 2, 1)$, $\beta_2 = (1, 1, 2)$, $\beta_3 = (1, 0, 0)$.

- wykazać, że $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i znaleźć współrzędne wektorów $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ w tej bazie, Sprawdzamy, że to baza, aby była to baza musi być to po prostu układ liniowo niezależny (kolejność x_3, x_2, x_1):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - w_1, w_3 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wyliczamy współrzędne – lewa strona trzech układów równań jest taka sama, kolumna wyrazów wolnych się różni, więc żeby nie liczyć trzy razy, piszemy w jednej macierzy:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 7 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - 3w_1} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & -5 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_3 - 4w_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 7 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_3} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 7 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_1 - w_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 7 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Czyli współrzędne $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ to odpowiednio $(4, 0, -3), (-2, -3, 7), (-1, 0, 1)$.

- podać przykład takiej bazy, że wektor β_1 ma w niej współrzędne $1, 1, 0$, a wektor β_2 współrzędne $0, 0, 1$.

Taka baza to na przykład $(0, 2, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 2)$.

7. Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni rozpiętej przez wektory $(3, 2, 1, 1), (5, 0, 2, 3), (4, 1, 4, 5), (4, 1, -1, -1)$.

Dla uproszczenia rachunków współrzędne zapiszemy w macierzy od końca:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 4 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_2 - 3w_1, w_3 - 5w_1, w_4 + w_1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & -1 & -9 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_2} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_4 + w_3} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Czyli, pamiętając, że zapisaliśmy wszystkie wektory od tyłu, przykładowa baza to $(3, 2, 1, 1), (-4, -6, -1, 0), (-7, -3, 0, 0)$, a wymiar to 3.

8. Opisać tę podprzestrzeń układem równań.

Skończmy rozwiązywać ten układ równań (z poprzedniego zadania mamy już postać schodkową, trzeba tylko zredukować, kolumna zerowa w pamięci):

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_1 + w_2, w_3 \cdot \frac{-1}{3}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 + 4w_3, w_2 + 6w_3} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{25}{3} \\ 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_2 \cdot (-1)} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{25}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Czyli rozwiązanie ogólne to (macierz zapisana była od końca!) $(a, -\frac{7}{3}d, 10a, -\frac{25}{3}a)$, czyli będzie tylko jedno równanie w szukanym układzie, a ponieważ przykładowy wektor bazowy, to $(3, -7, 30, -25)$, to szukane równanie, to:

$$3x_1 - 7x_2 + 30x_3 - 25x_4 = 0$$

9. Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni rozwiązań następującego układu równań.

$$\begin{cases} 5a + 10b + 6c + 3d = 0 \\ 2a + 4b + 4c + 3d = 0 \\ 3a + 6b + 5c + 5d = 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy (zerową kolumnę wyrazów wolnych mamy w pamięci):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 10 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & 5 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 10 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot 2, w_3 \cdot 2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 3 \\ 10 & 20 & 12 & 6 \\ 6 & 12 & 10 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 5w_1, w_3 - 3w_1} \\ &\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 4w_2, w_1 + 2w_2} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_1 \cdot \frac{1}{2}, w_2 \cdot \frac{-1}{2}, w_3 \cdot \frac{-1}{13}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 + \frac{5}{2}w_3, w_2 - 2w_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Czyli rozwiązanie ogólne to $(-2b, b, 0, 0)$, wymiar wynosi 1, a przykładowy wektor bazowy to $(-2, 1, 0, 0)$.

10. Znaleźć współrzędne wektora $(5, 0, 0)$ w bazie zadanej wektorami $(1, 2, -1), (1, 0, 2), (0, 1, 1)$.

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 + w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -10 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \cdot 2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -10 \\ 0 & 6 & 2 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 + 3w_2} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 5 & -20 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_2 \cdot \frac{-1}{2}, w_3 \cdot \frac{1}{5}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 + \frac{1}{2}w_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - w_2} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Czyli szukane współrzędne to 2, 3, -4 i rzeczywiście: $2(1, 2, -1) + 3(1, 0, 2) - 4(0, 1, 1) = (5, 0, 0)$.

11. Niech W będzie podprzestrzenią opisaną układem równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Znajdź bazę przestrzeni W i uzupełnij ją do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^5$.

Rozwiązujemy (kolumna zer w pamięci):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Czyli rozwiązanie ogólne to $(-7x_3 + 5x_4 - 4x_5, 5x_3 - 4x_4 + 3x_5, x_3, x_4, x_5)$, a więc jest to podprzestrzeń trzy-wymiarowa i przykładowa baza to $(-7, 5, 1, 0, 0), (5, -4, 0, 1, 0), (-4, 3, 0, 0, 1)$. Widać, że z wektorami $(1, 0, 0, 0, 0)$ oraz $(0, 1, 0, 0, 0)$ tworzą po trzech operacjach postać schodkową, więc stanowią z nimi bazę całej przestrzeni.

12. $(\cdot)$ Podać przykład takiej bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że wektor $(1, 2, 3)$ ma w niej współrzędne 3, 1, 2.

Wystarczy zauważyć, że wystarczy zamienić kolejność współrzędnych, czyli wziąć wektory z bazy standardowej, tyle że w innej kolejności, konkretnie: $(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$.

13. $(\star)$ Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{Z}_p$ o skończonej liczbie wektorów n . Znajdź wszystkie możliwe dzielniki liczby n .

Zauważ, że V musi być skończenie-wymiarową przestrzenią, oznaczmy zatem ten wymiar jako d . W takim razie wybierzmy bazę wielkości d . Wtedy każdy wektor da się opisać jednoznacznie jako współrzędne w tej bazie. Zatem wektorów jest $n = p^d$.