

# Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

## ćwiczenia 8.

25 lub 29 października 2019

1. Które z poniższych podzbiorów przestrzeni  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  są jej podprzestrzeniami?
  - (a) funkcje ciągłe,
  - (b) funkcje wielomianowe,
  - (c) funkcje spełniające warunek  $f(1) = f(2)$ ,
  - (d) funkcje spełniające warunek  $f(0) = f(1)^3$ .
2.  $(\cdot)$  Czy wektor  $(1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$  jest kombinacją liniową wektorów  $(1, 2, 4, 3), (0, 1, 3, 3), (1, 2, 1, 5)$ ?
3. Niech  $\alpha_1 = (3, 2, 1, 1), \alpha_2 = (2, 7, 2, 1), \alpha_3 = (1, 3, 1, 3)$  oraz  $\beta_1 = (2, -2, 0, 3), \beta_2 = (1, 1, 1, 1), \beta_3 = (-1, 3, 1, 10)$ . Które z wektorów  $\beta_i$  są kombinacjami liniowymi układu  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ?
4. Czy układ  $(1, 2, -1, 2), (1, 4, 2, 8), (-1, 0, 4, 4)$  jest liniowo niezależny?
5. Czy istnieje niezerowy wektor  $\alpha \in \mathbb{R}^4$ , który jest jednocześnie kombinacją liniową wektorów  $(1, 1, -1, -2), (1, 0, -3, 1)$  oraz kombinacją liniową wektorów  $(1, 2, 1, 1), (0, 1, 2, 1)$ .
6. Dla jakich wartości parametru  $r \in \mathbb{R}$  wektor  $(r, 8, 6)$  jest kombinacją liniową wektorów  $(3, 4, 5), (1, 4, 4), (7, 4, 7)$ ?
7.  $(\cdot)$  Dla jakich wartości parametrów  $s, t \in \mathbb{R}$  wektory  $(5, 7, s, 2), (1, 3, 2, 1), (2, 2, 4, t)$  tworzą układ liniowo niezależny?
8. Znaleźć wektor  $v \in \mathbb{Z}_2^3$ , żeby układ  $v, (1, 0, 1), (1, 1, 1)$  był liniowo niezależny w  $\mathbb{Z}_2^3$ .
9. Niech  $W = \{f \in \mathbb{R}[x]_2 : f(1) = f(2) = 0\}$ . Wykazać, że  $W = \text{lin}(x^2 - 3x + 2)$ .
10. Niech  $W = \text{lin}((2, 1, 4), (3, 5, -1), (3, -2, 13), (7, 7, 7), (-4, -9, 6))$ . Podać taki układ wektorów liniowo niezależnych  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , że  $W = \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .
11.  $(\star)$  Nieskończony układ wektorów nazywamy nieprzeliczalnym, jeśli nie da się wektorów w tym układzie ponumerować kolejnymi liczbami naturalnymi. Udowodnić, że istnieje nieprzeliczalny liniowo niezależny układ wektorów w  $\mathbb{Z}_2^\infty$ .