

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 8. – rozwiązania

25 lub 29 października 2019

1. Które z poniższych podzbiorów przestrzeni $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ są jej podprzestrzeniami?

(a) funkcje ciągłe,

Tak, suma funkcji ciągłych jest ciągła i iloczyn funkcji ciągłej przez liczbę jest ciągły.

(b) funkcje wielomianowe,

Tak, suma dwóch wielomianów jest wielomianem i wielomian przemnożony przez liczbę jest wielomianem

(c) funkcje spełniające warunek $f(1) = f(2)$,

Tak, jeśli f, g spełniają ten warunek, to również $(f + g)(1) = f(1) + g(1) = f(2) + g(2) = (f + g)(2)$ oraz jeśli dodatkowo $a \in \mathbb{R}$, to $(af)(1) = af(1) = af(2) = (af)(2)$.

(d) funkcje spełniające warunek $f(0) = f(1)^3$.

Nie. Niech $f(x) = g(x) = 1$. Wtedy f, g spełnia powyższy warunek. Tymczasem $(f + g)(0) = 2 \neq 8 = ((f + g)(1))^3$.

2. $(\cdot)$ Czy wektor $(1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ jest kombinacją liniową wektorów $(1, 2, 4, 3), (0, 1, 3, 3), (1, 2, 1, 5)$?

Czyli, czy układ:

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ 2a + b + 2c = 1 \\ 4a + 3b + c = 1 \\ 3a + 3b + 5c = 1 \end{cases}$$

jest niesprzeczny. Zobaczmy:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - 4w_1, w_4 - 3w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - 3w_2, w_4 - 3w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 \cdot \frac{-1}{3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_4 - 2w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

co oznacza sprzeczność. Więc ten wektor nie jest kombinacją podanych wektorów.

3. Niech $\alpha_1 = (3, 2, 1, 1), \alpha_2 = (2, 7, 2, 1), \alpha_3 = (1, 3, 1, 3)$ oraz $\beta_1 = (2, -2, 0, 3), \beta_2 = (1, 1, 1, 1), \beta_3 = (-1, 3, 1, 10)$. Które z wektorów β_i są kombinacjami liniowymi układu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$?

Oczywiście to pytanie zawiera w sobie pytanie o niesprzeczność 3 układów równań, z których każdy ma taką samą lewą stronę i różne wyrazy wolne (prawą stronę). Oszczędzi rachunków zapisanie wszystkiego w jednej macierzy, pamiętając jednak, że macierzą pierwszego układu są kolumny 1-4, drugiego 1-3 i 5., a trzeciego – 1-3 i 6.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - 3w_1, w_4 - w_1}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_4} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - 4w_2, w_4 + 3w_2} \\
& \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -10 & -10 & -2 & -40 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & -1 & 28 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 \cdot \frac{-1}{10}, w_4 \cdot \frac{1}{7}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{7} & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{w_4 - w_3} \\
& \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{35} & 0 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Czyli 1. i 3. układ są niesprzeczne, zaś 2. jest sprzeczny, czyli β_1 i β_3 są kombinacjami, zaś β_2 nie jest.

4. Czy układ $(1, 2, -1, 2)$, $(1, 4, 2, 8)$, $(-1, 0, 4, 4)$ jest liniowo niezależny?

Sprawdzamy, czy w wyniku sprowadzania macierzy do postaci schodkowej powstanie wiersz zerowy:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - w_1, w_3 + w_1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Czyli wiersz zerowy powstał, a zatem układ nie jest liniowo niezależny.

5. Czy istnieje niezerowy wektor $\alpha \in \mathbb{R}^4$, który jest jednocześnie kombinacją liniową wektorów $(1, 1, -1, -2)$, $(1, 0, -3, 1)$ oraz kombinacją liniową wektorów $(1, 2, 1, 1)$, $(0, 1, 2, 1)$.

Nazwijmy te wektory odpowiednio v_1, v_2, w_1, w_2 . Pytamy więc, czy istnieją a, b, c, d z czego co najmniej jedno różne od zera, takie że $av_1 + bv_2 = cw_1 + dw_2$, czyli $av_1 + bv_2 - cw_1 - dw_2 = 0$, co jest po prostu układem równań, a nasze zadanie polega na sprawdzeniu, czy ma on rozwiązanie niezerowe.

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - w_1, w_3 + w_1, w_4 + 2w_1} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - 2w_2, w_4 + 3w_2} \\
& \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_4, w_1 + w_2} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \cdot (-1), w_3 \cdot \frac{-1}{6}} \\
& \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 + 2w_3, w_2 - w_3} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Czyli rozwiązaniem ogólnym jest $(-\frac{1}{3}d, -\frac{1}{3}d, -\frac{2}{3}d, d)$, czyli jest rozwiązanie niezerowe, np. $(-1, -1, -2, 3)$, czyli $-v_1 - v_2 = (-2, -1, 4, 1) = -2w_1 + 3w_2$ jest przykładowym wektorem spełniającym warunki zadania.

6. Dla jakich wartości parametru $r \in \mathbb{R}$ wektor $(r, 8, 6)$ jest kombinacją liniową wektorów $(3, 4, 5)$, $(1, 4, 4)$, $(7, 4, 7)$?

Zapiszmy wektory w kolejności $(1, 4, 4)$, $(3, 4, 5)$, $(7, 4, 7)$, żeby było wygodniej liczyć i sprawdźmy.

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 7 & r \\ 4 & 4 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 4w_1, w_3 - 4w_1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 7 & r \\ 0 & -8 & -24 & 8 - 4r \\ 0 & -7 & -21 & 6 - 4r \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{-1}{8}} \\
& \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 7 & r \\ 0 & 1 & 3 & -1 + \frac{r}{2} \\ 0 & -7 & -21 & 6 - 4r \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 + 7w_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 7 & r \\ 0 & 1 & 3 & -1 + \frac{r}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 - \frac{r}{2} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Co oznacza, że układ jest niesprzeczny (czyli wektor jest kombinacją liniową) tylko, jeśli $-1 - \frac{r}{2} = 0$, czyli $r = -2$.

7. (...) Dla jakich wartości parametrów $s, t \in \mathbb{R}$ wektory $(5, 7, s, 2), (1, 3, 2, 1), (2, 2, 4, t)$ tworzą układ liniowo niezależny?

Sprawdźmy:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 7 & s & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & t \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & s & 2 \\ 2 & 2 & 4 & t \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 5w_1, w_3 - 2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & s-10 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & t-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & t-2 \\ 0 & -8 & s-10 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & t-2 \\ 0 & 0 & s-10 & 1-2t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Więc na to, żeby ostatni wiersz nie był zerowy wystarczy, by $s \neq 10$ lub $t \neq \frac{1}{2}$ i jeśli spełniony jest choć jeden z tych warunków, układ jest niezależny.

8. Znaleźć wektor $v \in \mathbb{Z}_2^3$, żeby układ $v, (1, 0, 1), (1, 1, 1)$ był liniowo niezależny w $\mathbb{Z}_2^3$.

Widać, że $v = (1, 0, 0)$ spełnia warunki zadania. Rzeczywiście:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - w_1, w_3 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Niech $W = \{f \in \mathbb{R}[x]_2 : f(1) = f(2) = 0\}$. Wykazać, że $W = \text{lin}(x^2 - 3x + 2)$.

Niech f będzie wielomianem drugiego stopnia, takim że $f(1) = f(2) = 0$. Wtedy $f = a(x-1)(x-2) = s(x^2 - 3x + 2)$.

10. Niech $W = \text{lin}((2, 1, 4), (3, 5, -1), (3, -2, 13), (7, 7, 7), (-4, -9, 6))$. Podać taki układ wektorów liniowo niezależnych $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, że $W = \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Sprowadzamy macierz do postaci schodkowej:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 13 \\ 7 & 7 & 7 \\ -4 & -9 & 6 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_2 \cdot 2, w_3 \cdot 2, w_4 \cdot 2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 10 & -2 \\ 6 & -4 & 16 \\ 14 & 14 & 14 \\ -4 & -9 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 3w_1, w_3 - 3w_1, w_4 - 7w_1, w_5 + 4w_1} \\ &\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -14 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & 7 & -14 \\ 0 & -7 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{7}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & 7 & -14 \\ 0 & -7 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 + 7w_2, w_4 - 7w_2, w_5 + 7w_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Czyli szukany układ wektorów są na przykład: $(2, 1, 4), (0, 1, -2)$.

11. (*) Nieskończony układ wektorów nazywamy nieprzeliczalnym, jeśli nie da się wektorów w tym układzie ponumerować kolejnymi liczbami naturalnymi. Udowodnić, że istnieje nieprzeliczalny liniowo niezależny układ wektorów w $\mathbb{Z}_2^\infty$.

Skonstruujmy taki zbiór wektorów $P \subseteq \mathbb{Z}_2^\infty$, który jest liniowo niezależny. Niech φ będzie zdefiniowane w następujący sposób indukcyjnie. Niech $\varphi(\emptyset) = \emptyset$. Mając dane $\varphi(w) = v$ dla w gdy $n = |w|$, niech $\varphi(w \frown 0) = v \frown \varepsilon_{2k}^{2^{n+1}}$ oraz $\varphi(w \frown 1) = v \frown \varepsilon_{2k+1}^{2^{n+1}}$, gdzie $\varepsilon_l^m = 0 \dots 010 \dots 0$ ma długość m z 1 na l -tej pozycji, oraz $k \in \mathbb{N}$ jest liczbą naturalną, której rozwinięcie binarne jest dane przez w . Na przykład, $\varphi(0) = 10$, $\varphi(1) = 01$, $\varphi(00) = 101000$, $\varphi(01) = 100100$, $\varphi(10) = 010010$, $\varphi(11) = 010001$, $\varphi(000) = 10100010000000$, itd. Teraz niech P będzie zbiorem nieskończonych ciągów zer i jedynek powstałych w tym procesie φ . Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in P$ będą parami różne. Wtedy istnieje $l \in \mathbb{N}$ takie że dla pewnych $i, j \leq n, i \neq j$, α_i obcięte do długości $2^l - 2$ jest różne od α_j obciętego do długości $2^l - 2$. Wtedy $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ obcięte do $[2^l - 2, 2^{l+1} - 2)$ są liniowo niezależne w $(\mathbb{Z}_2)^l$. Wobec tego P jest liniowo niezależny nad $\mathbb{Z}_2$.

Co więcej P jest nieprzeliczalny, bowiem jest indeksowany nieskończonymi ciągami zer i jedynek. Takiego zbioru nie da się ponumerować liczbami naturalnymi, bo gdyby było możliwe ponumerowanie nieskończonego zbioru zer i jedynek liczbami naturalnymi niech $\{0, 1\}^\mathbb{N} = \{c_0, \dots\}$ będzie takim ponumerowaniem. Wtedy ciąg d zadany jako $d(n) = c_n + 1$ nie jest na tej liście – sprzeczność.