

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 7.

24 lub 25 października 2019

1. $(\cdot)$ Niech L będzie podciałem ciała K . Wykazać, że K jest przestrzenią liniową nad L .
2. Niech V będzie przestrzenią liniową określoną nad $\mathbb{C}$. Wykazać, że V z tym samym dodawaniem a mnożeniem określonym jako $a \cdot v = \bar{a}v$ jest też przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$.
3. Niech V będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru X . Określamy działania na V w następujący sposób: dla $A, B \subseteq X$, niech $0A = \emptyset$, $1A = A$, $A + B = A \triangle B$. Wykazać, że V z tymi działaniami jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{Z}_2$.
4. Niech V_1, V_2 będą przestrzeniami liniowymi nad K . Wykazać, że zbiór $V_1 \times V_2$ z działaniami wykonywanymi po współrzędnych też jest przestrzenią liniową nad K .
5. $(\cdot)$ Dla poniższych podzbiorów w $\mathbb{R}^2$ sprawdzić, czy spełnia on oba warunki z definicji podprzestrzeni.
 - $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}\}$,
 - $\{(x, y) : |x| - |y| = 1\}$.
 - $\{(x, y) : x = 0 \text{ lub } y = x\}$,
 - $\{(x, y) : x^2 + 4y^2 = 4xy\}$.
6. Dla jakich wartości parametru $s \in \mathbb{R}$ podzbiór $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z + w = s^2 - 1 \text{ oraz } x + y + sw^2 = w^2\}$ jest podprzestrzenią liniową?
7. Które z poniższych podzbiorów $\mathbb{R}^\infty$ są jej podprzestrzeniami:
 - (a) ciągi stałe,
 - (b) ciągi zbieżne,
 - (c) ciągi ograniczone,
 - (d) $l^1 = \{\langle a_i \rangle : \sum_{i=1}^\infty |a_i| < \infty\}$.
8. Niech W_1, W_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni V . Wykazać, że zbiór $W_1 \cup W_2$ jest podprzestrzenią przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy $W_1 \subseteq W_2$ lub $W_2 \subseteq W_1$.
9. $(\star)$ Niech p będzie liczbą pierwszą. Rozstrzygnij ile podprzestrzeni istnieje w przestrzeni $(\mathbb{Z}_p)^n$ rozważanej jako przestrzeń liniowa nad $\mathbb{Z}_p$.