

Geometria z algebrą liniową, 2019/2020

ćwiczenia 7. – rozwiązania

24 lub 25 października 2019

1. $(\cdot)$ Niech L będzie podciałem ciała K . Wykazać, że K jest przestrzenią liniową nad L .

Dokładnie wszystkie własności z definicji przestrzeni są powtórzeniem własności z definicji ciała K . Czasem jedynie polegają na ograniczeniu niektórych zmiennych do ciała L .

2. Niech V będzie przestrzenią liniową określoną nad $\mathbb{C}$. Wykazać, że V z tym samym dodawaniem a mnożeniem określonym jako $a \cdot v = \bar{a}v$ jest też przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$.

Musimy sprawdzić własności związane z mnożeniem.

$$a \cdot (v + w) = \bar{a}(v + w) = \bar{a}v + \bar{a}w = a \cdot v + a \cdot w,$$

$$(a + b) \cdot v = (\overline{a + b})v = (\bar{a} + \bar{b})v = \bar{a}v + \bar{b}v = a \cdot v + b \cdot v,$$

$$(ab) \cdot v = (\overline{ab})v = (\bar{a}\bar{b})v = \bar{a}(\bar{b}v) = a \cdot (b \cdot v),$$

$$1 \cdot v = \bar{1}v = 1v = v.$$

3. Niech V będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru X . Określamy działania na V w następujący sposób: dla $A, B \subseteq X$, niech $0A = \emptyset$, $1A = A$, $A + B = A \triangle B$. Wykazać, że V z tymi działaniami jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{Z}_2$.

Branie różnicy symetrycznej jest rzeczywiście łączne i przemienne. Mamy także

$$\emptyset \triangle A = A$$

Wektorem przeciwnym do A będzie A , bo $A \triangle A = \emptyset$.

$$0(A + B) = \emptyset = 0A \triangle 0B$$

$$1(A + B) = A \triangle B = 1A \triangle 1B$$

$$(0 + 0)A = \emptyset = 0A \triangle 0A$$

$$(0 + 1)A = 1A = A \triangle \emptyset = 1A \triangle 0A$$

$$(1 + 1)A = \emptyset = 1A \triangle 1A$$

$$(00)A = \emptyset = 0(0A)$$

$$(01)A = \emptyset = 0(1A)$$

$$(10)A = \emptyset = 1(0A)$$

$$(11)A = A = 1(1A)$$

$$1A = A.$$

4. Niech V_1, V_2 będą przestrzeniami liniowymi nad K . Wykazać, że zbiór $V_1 \times V_2$ z działaniami wykonywanymi po współrzędnych też jest przestrzenią liniową nad K .

Sprawdza się to analogicznie, jak dowodzi, że $\mathbb{R}^2$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$.

5. Dla poniższych podzbiorów w $\mathbb{R}^2$ sprawdzić, czy spełnia on oba warunki z definicji podprzestrzeni.

- $\{(x, y): x, y \in \mathbb{Z}\}$,

W pierwszym przykładzie spełnia warunek z dodawaniem $((x, y) + (z, w) = (x+z, y+w)$ i $x+z, y+w \in \mathbb{Z}$), ale nie spełnia warunku z mnożeniem, np. $(1, 0)$ jest elementem tego zbioru, ale $\frac{1}{2}(1, 0) = (\frac{1}{2}, 0)$ już nie.

- $\{(x, y): |x| - |y| = 1\}$.

W drugim przykładzie nie spełnia warunku z dodawaniem, bo $(1, 0), (-1, 0)$ są w tym zbiorze, ale $(1, 0) + (-1, 0) = (0, 0)$ już nie oraz nie spełnia z mnożeniem, bo $(1, 0)$ są w zbiorze, ale już $\frac{1}{2}(1, 0) = (\frac{1}{2}, 0)$ nie.

- $\{(x, y): x = 0 \text{ lub } y = x\}$,

Nie spełnia warunku z dodawaniem, bo $(1, 0)$ oraz $(1, 1)$ są w tym zbiorze, ale $(0, 1) + (1, 1) = (1, 2)$ już nie. Spełnia warunek z mnożeniem, bowiem $c \cdot (x, 0) = (cx, 0)$ należy do zbioru, podobnie jak $c \cdot (x, x) = (cx, cx)$.

- $\{(x, y): x^2 + 4y^2 = 4xy\}$.

Wbrew pozorom, tu jest napisane $x - 2y = 0$, czyli $x = 2y$. Ten zbiór jest podprzestrzenią liniową (spełnia oba warunki), bowiem $(x, 2x) + (y, 2y) = (x+y, 2x+2y)$ należy do tego zbioru i $c \cdot (x, 2x) = (cx, 2cx)$ też.

6. Dla jakich wartości parametru $s \in \mathbb{R}$ podzbiór $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4: x - 2y + z + w = s^2 - 1 \text{ oraz } x + y + sw^2 = w^2\}$ jest podprzestrzenią liniową?

Założmy, że $s < 1$. Wtedy wektor $v = (1, 0, s^2 - 2 - \frac{1}{\sqrt{1-s}}, \frac{1}{\sqrt{1-s}})$ spełnia oba równania, ale wektor $2v$ już nie spełnia 2. równania, sprzeczność.

Założmy więc, że $s > 1$. Wtedy wektor $w = (-1, 0, s^2 - \frac{1}{\sqrt{s-1}}, \frac{1}{\sqrt{s-1}})$ spełnia oba równania, ale wektor $2w$ już nie spełnia 2. równania, sprzeczność.

Więc pozostaje $s = 1$ i wtedy rzeczywiście zbiór jest podprzestrzenią liniową.

7. Które z poniższych podzbiorów $\mathbb{R}^\infty$ są jej podprzestrzeniami:

- (a) ciągi stałe,

Tak, suma dwóch ciągów stałych jest stała, ciąg stały przemnożony przez liczbę jest stały.

- (b) ciągi zbieżne,

Tak, suma dwóch ciągów zbieżnych jest zbieżna (do sumy ich granic). Ciąg zbieżny przemnożony przez liczbę jest zbieżny do swojej granicy przemnożonej przez tę liczbę.

- (c) ciągi ograniczone,

Tak, suma dwóch ciągów ograniczonych jest ograniczona. Ciąg ograniczony przemnożony przez liczbę jest ograniczony.

- (d) $l^1 = \{\langle a_i \rangle: \sum_{i=1}^\infty |a_i| < \infty\}$.

Zauważmy, że dla dwóch ciągów $a_i, b_i \in l^1$

$$\sum_{i=1}^\infty |a_i + b_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |a_i + b_i| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |a_i| + |b_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |a_i| + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |b_i| = \sum_{i=1}^\infty |a_i| + \sum_{i=1}^\infty |b_i|,$$

zatem $a_i + b_i \in l^1$. Podobnie, jeśli $a \in \mathbb{R}$ oraz $a_i \in l^1$, to

$$\sum_{i=1}^\infty |aa_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |aa_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |a||a_i| + |b_n| = a \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |a_i| = a \sum_{i=1}^\infty |a_i|,$$

a zatem również $aa_i \in l^1$.

8. Niech W_1, W_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni V . Wykazać, że zbiór $W_1 \cup W_2$ jest podprzestrzenią przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy $W_1 \subseteq W_2$ lub $W_2 \subseteq W_1$.

Kierunek implikacji w lewo jest oczywisty. W drugą stronę, założmy przeciwnie, że $W_1 \cup W_2$ jest podprzestrzenią przestrzeni V , ale istnieją $v \in W_2 \setminus W_1$ oraz $w \in W_1 \setminus W_2$. Wtedy $v + w \in W_1 \cup W_2$, skoro to jest podprzestrzeń. Zatem $v + w \in W_1$ lub $v + w \in W_2$. Bez straty ogólności założmy tę pierwszą opcję. Ale wtedy $v = v + w - w \in W_1$, co przeczy naszemu założeniu. $\square$

9. (★) Niech p będzie liczbą pierwszą. Rozstrzygnij ile podprzestrzeni istnieje w przestrzeni $(\mathbb{Z}_p)^n$ rozważanej jako przestrzeń liniowa nad $\mathbb{Z}_p$.

Przeprowadzamy następującą procedurę wyboru podprzestrzeni w przestrzeni liniowej $(\mathbb{Z}_p)^n$. Ustalamy k z przedziału od 0 do p i wybierzemy k niezerowych wektorów tak, że każdy kolejny nie należy do najmniejszej podprzestrzeni do której należą poprzednie. Na ile sposobów można to zrobić? Pierwszy wektor można wybrać na $(p^n - 1)$ sposobów (wszystkie poza zerowym). Teraz jest p wektorów (łącznie z zerowym), które można otrzymać z pierwszego przez mnożenie przez liczbę, więc drugi możemy wybrać na $(p^n - p)$ sposobów. Widać, że i -ty wektor będziemy mogli wybrać na $(p^n - p^{i-1})$ sposobów. Czyli k wektorów wybraliśmy na

$$(p^n - 1) \cdot \dots \cdot (p^n - p^{k-1})$$

sposobów. Ale wiele wyborów generuje tę samą podprzestrzeń. Jak wiele, a no tyle, ile w tej wybranej podprzestrzeni można wybrać takich układów k wektorów wewnątrz niej, czyli zgodnie z analogicznym rozumowaniem

$$(p^k - 1) \cdot \dots \cdot (p^k - p^{k-1}),$$

więc ostatecznie szukana liczba to:

$$\sum_{k=0}^p \frac{(p^n - 1) \cdot \dots \cdot (p^n - p^{k-1})}{(p^k - 1) \cdot \dots \cdot (p^k - p^{k-1})}.$$