

Geometria z algebrą liniową, 2019/2020

ćwiczenia 6.

18 lub 22 października 2019

Zadania

- (·) Niech $a, b, c \in \mathbb{C}$ oraz $a \neq 0$. Niech $d \in \mathbb{C}$ będzie liczbą taką, że $d^2 = b^2 - 4ac$. Wykazać, że pierwiastkami wielomianu $ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ są liczby $\frac{-b+d}{2a}$ oraz $\frac{-b-d}{2a}$.
- Niech $f \in \mathbb{R}[x]$. Wykazać, że:
 - jeśli $c \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem wielomianu f w $\mathbb{C}$, to $\bar{c}$ też jest pierwiastkiem f ,
 - wielomian f rozkłada się nad $\mathbb{R}$ na czynniki stopnia ≤ 2 .
- (·) Dla każdego z poniższych wielomianów znaleźć wszystkie jego pierwiastki, rozłożyć ten wielomian nad $\mathbb{C}$ na czynniki stopnia 1 oraz rozłożyć go nad $\mathbb{R}$ na czynniki stopnia ≤ 2 .
 - $x^2 + 4x + 5$,
 - $x^4 - 2x^2 + 4$,
 - $x^7 - x$.
- Znaleźć wszystkie pierwiastki
 - stopnia 4 z liczby $-\sqrt{3} + 3i$,
 - stopnia 6 z liczby $-27i$ (zapisz te pierwiastki tylko w postaci wykładniczej),
 - stopnia 3 z liczby $5+5i$ (zapisz te pierwiastki tylko w postaci wykładniczej).
- Niech K będzie ciałem. Wykazać, że:
 - Wielomian stopnia n o współczynnikach w K może mieć w K co najwyżej n różnych pierwiastków.
 - Przekształcenie $K[x] \rightarrow K^K$ przypisujące każdemu wielomianowi odpowiadającą mu funkcję wielomianową jest różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy K jest ciałem nieskończonym.

- Niech $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ będą wszystkimi pierwiastkami stopnia n z 1. Wykazać, że:
 - $z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = (-1)^{n+1}$.
 - Jeśli liczby $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ należą do n -kąta foremnego W o wierzchołkach $z_1, z_2, \dots, z_n$, to liczba $w_1 \cdot w_2$ też należy do W .
- (*) Niech L będzie podciałem ciała K . Wielomian $f(x) \in L[x]$ oraz wielomian $f(f(f(x)))$ mają wspólny pierwiastek w K . Udowodnić, że wielomiany te mają wspólny pierwiastek w L .

Praca domowa 2

- Oblicz wyrażenie:

$$z = \frac{(-1 + \sqrt{3}i)^{1017} \cdot i^{2019}}{(1-i)^{2016}},$$

zapisując tę liczbę w postaci $a + bi$.

- Następnie wylicz $\sqrt[3]{+z}$ oraz zaznacz orientacyjnie na płaszczyźnie zespolonej pozostałe $\sqrt[3]{z}$. Liczbę $\sqrt[3]{+z}$ zapisz w postaci wykładniczej.
- Znajdź rozwiązanie ogólne następującego układu równań liniowych o współczynnikach w $\mathbb{C}$.

$$\begin{cases} (i+1)x + y + (2i+1)z = 2i-1 \\ (2i+2)x + (i-1)y + (1+i)z = -3+i \\ (-1-i)x + 2y + (i-1)z = i+1 \end{cases}$$

- Znaleźć wszystkie pierwiastki wielomianu $x^6 + x^2$, rozłożyć ten wielomian nad $\mathbb{C}$ na czynniki stopnia 1 oraz rozłożyć go nad $\mathbb{R}$ na czynniki stopnia ≤ 2 .
- Niech $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ będą wszystkimi pierwiastkami stopnia n z 1. Wykazać, że $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$.