

Geometria z algebrą liniową, 2019/2020

ćwiczenia 6. – rozwiązania pracy domowej 2

18 lub 22 października 2019

1. Oblicz wyrażenie:

$$z = \frac{(-1 + \sqrt{3}i)^{1017} \cdot i^{2019}}{(1 - i)^{2016}},$$

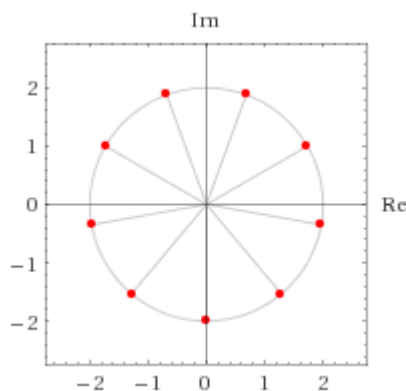
zapisując tę liczbę w postaci $a + bi$.

x	$ x $	$\text{Arg} x$
$-1 + \sqrt{3}i$	2	$\frac{2\pi}{3}$
$(-1 + \sqrt{3}i)^{1017}$	2^{1017}	$678\pi \sim 0$
i	1	$\pi/2$
i^{2019}	1	$1009\pi + \frac{\pi}{2} \sim \frac{3\pi}{2}$
$1 - i$	$\sqrt{2}$	$-\pi/4$
$(1 - i)^{2016}$	2^{1008}	$-504\pi \sim 0$
L	2^{1017}	$\frac{3\pi}{2}$
z	$2^9 = 512$	$\frac{3\pi}{2}$

A zatem $z = -512i$.

2. Następnie wylicz $\sqrt[9]{+z}$ oraz zaznacz orientacyjnie na płaszczyźnie zespolonej pozostałe $\sqrt[9]{z}$. Liczbę $\sqrt[9]{+z}$ zapisz w postaci wykładniczej.

Mamy więc $|\sqrt[9]{+z}| = 2$ oraz $\text{Arg} \sqrt[9]{+z} = \frac{\pi}{6}$. Zatem $\sqrt[9]{+z} = \sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6}$. Pozostałe pierwiastki są rozmieszczone równomiernie, co $\frac{2\pi}{9} = 40^\circ$ na okręgu o promieniu 2, czyli:



3. Znajdź rozwiązanie ogólne następującego układu równań liniowych o współczynnikach w $\mathbb{C}$.

$$\begin{cases} (i+1)x + y + (2i+1)z = 2i-1 \\ (2i+2)x + (i-1)y + (1+i)z = -3+i \\ (-1-i)x + 2y + (i-1)z = i+1 \end{cases}$$

Wpisujemy w macierz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} i+1 & 1 & 2i+1 & 2i-1 \\ 2i+2 & i-1 & 1+i & -3+i \\ -1-i & 2 & i-1 & i+1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 + w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} i+1 & 1 & 2i+1 & 2i-1 \\ 0 & i-3 & -1-3i & -1-3i \\ 0 & 3 & 3i & 3i \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \cdot 1/(i-3)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} i+1 & 1 & 2i+1 & 2i-1 \\ 0 & 1 & i & i \\ 0 & 3 & 3i & 3i \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_2, w_3 - 3w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} i+1 & 0 & i+1 & i-1 \\ 0 & 1 & i & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 \cdot 1/(i+1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & i \\ 0 & 1 & i & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Zatem rozwiązanie ogólne to:

$$\begin{cases} x = i - z \\ y = i - iz \end{cases}$$

4. Znaleźć wszystkie pierwiastki wielomianu $x^6 + x^2$, rozłożyć ten wielomian nad $\mathbb{C}$ na czynniki stopnia 1 oraz rozłożyć go nad $\mathbb{R}$ na czynniki stopnia ≤ 2 .

Mamy $x^6 + x^2 = x^2(x^4 + 1)$. Zatem pierwiastki to 0 (podwójny) oraz pierwiastki czwartego stopnia z -1 czyli $\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$. Zatem:

$$x^6 + x^2 = x \cdot x \cdot (x - \sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2)(x + \sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2)(x + \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2)(x - \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2).$$

W liczbach rzeczywistych daje to:

$$x^6 + x^2 = x \cdot x \cdot (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

5. Niech $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ będą wszystkimi pierwiastkami stopnia n z 1. Wykazać, że $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$.
Niech $z = e^{2i\pi/n}$ zatem

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1} = 0.$$