

Geometria z algebrą liniową, 2019/2020

ćwiczenia 5.

17 lub 18 października 2019

1. (·) Czy następujący zbiór $X \subseteq \mathbb{C}$ jest skończony? Jeśli tak, wypisać jego elementy.

(a) $X = \{i^n : n \in \mathbb{N}\},$

(b) $X = \{(1-i)^n : n \in \mathbb{N}\}.$

(c) $X = \left\{ \frac{(1+i)^{n+3}}{(1-i)^n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$

2. Niech $w = \frac{3+4i}{5}$. Znaleźć taką liczbę zespoloną z , że $w = \frac{z}{\bar{z}}$. Wykazać, że każda liczba zespolona o module 1 jest ilorazem dwóch liczb zespolonych sprzężonych.

3. (·) Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań liniowych

$$\begin{cases} (1-i)x_1 + ix_2 + 2x_3 - ix_4 = 1+i \\ (1+i)x_1 + x_2 + 2ix_3 + (1+2i)x_4 = 1-i \\ ix_1 + (-1+i)x_3 + ix_4 = 0 \end{cases}$$

4. Poniższą liczbę $z \in \mathbb{C}$, przedstawić w postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) $z = (1-i)^{100}$

(b) $z = \left(\frac{i+\sqrt{3}}{i+1} \right)^{55}$

(c) $z = \frac{(\sqrt{3}+3i)^{40}}{(\sqrt{3}+i)^{20}}$

5. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz niech $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ będą takie, że $0 < \theta' - \theta < 2\pi/n$. Niech $L_\theta = \{z \in \mathbb{C} : \arg z = \theta\}$ oraz $K_{(\theta, \theta')} = \{z \in \mathbb{C} : \arg \theta < z < \theta'\}$. Wykazać, że dla odwzorowania $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$ zachodzi:

(a) $f[L_\theta] = L_{n\theta},$

(b) $f^{-1}[L_\theta] = \bigcup_{k=0}^{n-1} L_{(\theta+2k\pi)/n}.$

(c) $f[K_{(\theta, \theta')}] = K_{(n\theta, n\theta')}.$

(d) $f^{-1}[K_{(\theta, \theta')}] = \bigcup_{k=0}^{n-1} K_{((\theta+2k\pi)/n, (\theta'+2k\pi)/n)}.$

6. Naszkicować następujące zbiory zawarte w $\mathbb{C}$.

(a) $\{z \in \mathbb{C} : \Re(1+i)z \geq 1\},$

(b) $\{z \in \mathbb{C} : \Im(1+i)z^2 < 0\},$

(c) $D, f[D]$ oraz $g^{-1}[D]$, dla $D = \{z \in \mathbb{C} : \Re z \geq 0\}$, $f(z) = (1-i)z + 3$, $g(z) = -iz^4$,

(d) $D, f[D]$ oraz $g^{-1}[D]$, dla $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg z \leq \pi/4\}$, $f(z) = iz^3 + 2i$, $g(z) = (z+i)^2$.

7. (*) Dane są punkty B i C . Punkt A jest dowolnym punktem ustalonej półpłaszczyzny wyznaczonej przez prostą AB . Na bokach trójkąta ABC zbudowano, na zewnątrz, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Wykaż, że wszystkie tak otrzymane proste DF przechodzą przez pewien ustalony punkt, zależny tylko od położenia B i C . Wskazówka: umieść tę sytuację na płaszczyźnie zespolonej.