

Geometria z algebrą liniową, 2019/2020

ćwiczenia 3. – rozwiązania pracy domowej 1.

10 lub 11 października 2019

1. Wyznacz trójmian kwadratowy $w(x)$, który w punkcie -1 przyjmuje wartość -2 , zaś w punkcie -2 wartość -6 , oraz przyjmujący swoją minimalną wartość dla $x = -\frac{5}{2}$.

Zatem zakładając, że $w(x) = ax^2 + bx + c$, mamy następujące informacje $w(-1) = a - b + c = -2$, $w(-2) = 4a - 2b + c = -6$ i w końcu $\frac{-b}{2a} = -\frac{5}{2}$, zatem $5a - b = 0$, czyli mamy układ równań:

$$\begin{cases} a - b + c = -2 \\ 4a - 2b + c = -6 \\ 5a - b = 0 \end{cases}$$

Zapisuję go w macierzy w kolejności niewiadomych c, b, a , żeby się łatwo liczyło:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \cdot (-1), w_3 \cdot \frac{1}{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right]$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_3, w_2 + 3w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 + w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

A zatem $a = 2, b = 10, c = 6$, czyli $w(x) = 2x^2 + 10x + 6$.

2. Następnie znajdź wszystkie pierwiastki wielomianu $v(x) = 2x^3 - w(x)$.

Zatem $v(x) = 2x^3 - 2x^2 - 10x - 6$. Zgaduję, że $x = -1$ jest pierwiastkiem tego wielomianu i dzielę $v(x)$ przez $(x + 1)$. Mamy $v(x) = (x + 1)(2x^2 - 4x - 6)$. Łatwo policzyć, że pierwiastki tego trójmianu to -1 i 3 , czyli pierwiastkami $v(x)$ są -1 (podwójny) oraz 3 .

3. Zbadać dla jakich wartości $s, t \in \mathbb{R}$ następujący układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + (2 - t)y + 7z = -s + 3 \\ -2x - 3y = -3 \end{cases}$$

jest oznaczony, dla jakich nieoznaczony, a dla jakich sprzeczny.

Rozwiązuję zadany układ równań (zapisuje zmienne w kolejności x, z, y):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & -t+2 & -s+3 \\ -2 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 3w_1, w_3 + 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -t-1 & -s \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -t-1 & -s \end{array} \right]$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -t+1 & -s+2 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - 2w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -t+1 & -s+2 \end{array} \right]$$

I mamy postać schodkową, z której widać, że:

- układ jest sprzeczny, jeśli $t = 1, s \neq 2$,
- układ jest oznaczony, jeśli $t \neq 1$,

- układ jest nieoznaczony, jeśli $t = 1$ oraz $s = 2$.
4. W przypadku, gdy $t = 1$ oraz $s = 2$ znaleźć rozwiązanie ogólne powyższego układu równań oraz podać dowolne przykładowe rozwiązanie.

Pracujemy dalej dla $t = 1$ oraz $s = 2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \cdot (1/2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Zatem rozwiązanie ogólne to

$$\begin{cases} x = 3/2 - 3/2y \\ z = -1/2 + 1/2y \end{cases},$$

czyli w postaci parametrycznej $(3/2 - 3/2y, y, -1/2 + 1/2y)$. Przykładowe rozwiązanie, dla $y = 1$, mamy $(0, 1, 0)$.

5. Niech K będzie ciałem oraz $a, b \in K$. Wykaż, że $(-a) \cdot b = a \cdot (-b)$ oraz $(-a) \cdot (-b) = ab$.

Mamy: $(-a) \cdot b + a \cdot b = ((-a) + a) \cdot b = 0 \cdot b = 0$, a zatem $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$. Podobnie $a \cdot (-b) + a \cdot b = a \cdot ((-b) + b) = a \cdot 0 = 0$, a zatem $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$, czyli $(-a) \cdot b = a \cdot (-b)$.

Tymczasem $(-a) \cdot (-b) + a \cdot (-b) = ((-a) + a) \cdot (-b) = 0 \cdot (-b) = 0$, czyli $(-a) \cdot (-b) = -(a \cdot (-b)) = -(-a \cdot b) = a \cdot b$.