

Geometria z algebrą liniową, 2019/2020

ćwiczenia 2. – rozwiązania

4 lub 8 października 2019

1. Znaleźć rozwiązanie ogólne poniższych układów równań.

$$\begin{cases} 3a + 2b + 3c + 4d = 8 \\ a + b + c + 2d = 4 \\ 5a + 3b + 6c + 3d = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a + 2b + c + 4d + 3e = 1 \\ 5a + 8b + 2c + 5d + 8e = 4 \\ 4a - 2b + c + 7d + e = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 2y + 8z = 1 \\ 6x - 3y - 4z = 4 \\ 7x + 4y + 9z = 6 \\ 4x - 5y - 4z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 4y + 5z + 2w + 3t = 1 \\ 3x + 2y + 4z + w + 2t = 3 \\ 3x + 2y - 2z + w = -7 \\ 9x + 6y + z + 3w + 2t = 2 \end{cases}.$$

No to po kolei:

(a)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 6 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 8 \\ 5 & 3 & 6 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 3w_1, w_3 - 5w_1} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 1 & -7 & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 + w_2} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot (-1), w_1 - w_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Czyli rozwiązanie ogólne, to:

$$\begin{cases} a = 3 - 3d \\ b = 4 - 2d \\ c = -3 + 3d \end{cases},$$

w postaci parametrycznej: $(3 - 3d, 4 - 2d, -3 + 3d, d)$.

(b) Korzystam z tego, że kolumny mogę napisać w dowolnej, ale ustalonej kolejności i zapiszę w kolejności zmiennych: c, a, b, d, e :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 5 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & -2 & 7 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 + w_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

czyli ten układ jest sprzeczny.

- (c) Korzystam z tego, że kolumny mogą napisać w dowolnej, ale ustalonej kolejności i zapiszę w kolejności zmiennych: y, x, z :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 1 \\ -3 & 6 & -4 & 4 \\ 4 & 7 & 9 & 6 \\ -5 & 4 & -4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot 2, w_4 \cdot 2} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 1 \\ -6 & 12 & -8 & 8 \\ 4 & 7 & 9 & 6 \\ -10 & 8 & -8 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 + 3w_1, w_3 - 2w_1, w_4 + 5w_1} \\ & \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 27 & 16 & 11 \\ 0 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 33 & 32 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 27 & 16 & 11 \\ 0 & 33 & 32 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 + 9w_2, w_4 + 11w_2} \\ & \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & -47 & 47 \\ 0 & 0 & -45 & 45 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \cdot \frac{-1}{47}, w_4 \cdot \frac{-1}{45}} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 - w_3} \\ & \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - 8w_3, w_2 + 7w_3} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{-1}{3}} \\ & \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - 5w_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \cdot \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Czyli ten układ ma tylko jedno rozwiązanie: $y = 2, x = 1, z = -1$, czyli $(1, 2, -1)$.

- (d) Zapisujemy macierz układu i sprowadzamy do postaci schodkowej zredukowanej:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & -7 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & -7 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - w_1, w_4 - 3w_1} \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & -4 & -7 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{-1}{3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & -4 & -7 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - 6w_2, w_4 + 11w_2} \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{34}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{34}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 \cdot (-3)} \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 2w_3, w_2 - \frac{1}{3}w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 71 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 4w_2} \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 \cdot \frac{1}{3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{19}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

A zatem rozwiązanie ogólne to:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{19}{3} - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_3 = 13 \\ x_5 = -34 \end{cases}$$

W postaci parametrycznej: $(\frac{19}{3} - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4, x_2, 13, x_4, -34)$.

2. Zenobi za pączek, 2 butelki wody i ciastko zapłacił 4,5 PLN, zaś Zdzisław, który kupił 2 pączki, 5 butelek wody i 3 ciastka wydał 11 PLN. Czy z tego można wywnioskować ile w tym samym sklepiu musiał zapłacić Zbigniew za 2 pączki, 6 butelek wody i 4 ciastka?

Można wywnioskować, tylko jeśli zakupy Zbigniewa to suma a razy zakupy Zenobiego plus b razy zakupy Zdzisława dla pewnych liczb rzeczywistych a, b . Rozpisując to zdanie na 3 zdania dotyczące pączków, wody i ciastek odpowiednio otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a + 2b = 2 \\ 2a + 5b = 6 \\ a + 3b = 4 \end{cases}$$

I takie a, b istnieją, jeśli ten układ jest niesprzeczny. Łatwa sprawdzić, że jest niesprzeczny, bo ma jedno rozwiązanie: $a = -2, b = 2$, czyli umiemy wywnioskować. Zbigniew zapłacił $-2 \cdot 4,5 + 2 \cdot 11 = -9 + 22 = 13$ PLN.

3. $(\cdot)$ Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ poniższy układ jest sprzeczny?

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ -2sx_1 + sx_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

Zapisujemy macierz układu równań i sprowadzamy do postaci schodkowej.

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -2s & s & 4 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 6 \\ -2 & s & 4 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 + 2w_1, w_3 - 2sw_1} \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & -5s & -4s + 4 & -2s - 3 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{8}} \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5s & -4s + 4 & -2s - 3 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 + 5sw_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4s + 4 & 3s - 3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Układ jest sprzeczny jeśli w ostatnim wierszu są same zera z wyjątkiem niezerowego wyrazu wolnego, ale $-4s + 4 = 0$, jeśli $s = 1$, ale wtedy też $3s - 3 = 0$, czyli ten układ dla żadnego s nie jest sprzeczny.

4. Dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$ ciąg $(t^2, -1, 1, -t^2, 1)$ jest rozwiązaniem poniższego układu równań.

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 5x_5 = -1 \\ 9x_1 + 8x_2 - 9x_3 + 2x_4 + 11x_5 = 1 \\ -4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$$

Podstawiając dostajemy równania: $2t^2 = 2, 7t^2 = 7, -3t^2 = -3$, czyli jest to rozwiązanie dla $t = \pm 1$.

5. $(\star)$ Rozwiązać następujący układ równań:

$$\begin{cases} x^2 = yz + 1 \\ y^2 = zx + 2 \\ z^2 = xy + 4. \end{cases}$$

Mnożymy równania stronami odpowiednio przez y , z i x i dodajemy stronami, uzyskując:

$$x^2y + zy^2 + xz^2 = y^2z + y + z^2x + 2z + x^2y + 4x,$$

czyli

$$0 = y + 2z + 4x.$$

Gdy pomnożymy odpowiednio przez z , x i y i dodamy stronami, to otrzymamy:

$$0 = z + 2x + 4y.$$

Odejmując od poprzedniego otrzymanego równania, dwa razy drugie otrzymane równanie, mamy: $0 = -7y$, a więc $y = 0$, co podstawiając do zadanych na początku równań daje $x^2 = 1$ oraz $z^2 = 4$, przy czym $zx = -2$, a zatem mamy dwa rozwiązania $x = -1, y = 0, z = 2$ lub $x = 1, y = 0, z = -2$.