

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 11.

8 lub 12 listopada 2019

1. Znaleźć rzędy macierzy nad $\mathbb{Z}_p$ w zależności od liczby pierwszej p .

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uwaga: w tym zadaniu za każdym razem, gdy użyta jest liczba $n \geq p$ należy ją interpretować jako sumę n jedynek.

2. $(\cdot)$ Znaleźć rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & s^2 - 2 & 7 & 10 \\ 4 & 5 & 3 & -s & -2 \end{bmatrix}$$

w zależności od $s \in \mathbb{R}$.

3. $(\cdot)$ Rozważmy układ równań

$$\begin{cases} 3x + y + 3z = 2 \\ 4x + 4y + 7z = t \\ 5x + sy + 11z = 0 \\ 2x - 2y - z = 3 \end{cases}$$

Korzystając z Tw. Kroneckera-Capelliego określ dla jakich $s, t \in \mathbb{R}$

- a) układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie?
- b) ma nieskończenie wiele rozwiązań?
- c) nie ma rozwiązań?

4. Niech $A, B \in M_{m \times n}(K)$ dla pewnego ciała K . Wykazać, że $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

5. Wykazać, że rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ma rząd 2 wtedy i tylko wtedy, gdy $ad - bc \neq 0$.

6. Wykazać, że jeśli $A = [a_{ij}] \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ jest niezerową macierzą taką, że $a_{ij} = -a_{ji}$, to $r(A) = 2$.

7. Niech bazą V będzie $(1, -1, 1, 1, -2)$, $(4, 4, -4, -4, 0)$, $(3, 1, 3, -1, 3)$, zaś bazą W wektory $(-1, 0, 1, 0, 0)$, $(0, -1, 0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0, 0, 1)$. Uzupełnić bazę przestrzeni V do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^5$ korzystając z wektorów z W .

8. Opisać układem równań liniowych przestrzeń $\text{lin}((-9, 3, 6, -3), (-4, 2, 1, 5), (-5, 5, 4, 3))$.

9. Znaleźć wymiar podprzestrzeni przestrzeni $K[x]$ złożonej z wszystkich wielomianów stopnia mniejszego od 6 podzielnych przez $x - 1$.

10. $(\star)$ Niech V będzie przestrzenią nieskończenie wymiarową, oraz niech $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ będą jej bazami. Udowodnij, że istnieje bijekcja $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$.
Wyjaśnienie: nieskończony układ liniowy jest liniowo zależny, jeśli wektor zerowy można skombinować z pewnych skończenie wielu z tych wektorów w nietrywialny sposób. Wskazówka: możesz skorzystać z faktu, że jeśli A i B to zbiory nieskończone natomiast $\{A_b: b \in B\}$ to rodzina zbiorów skończonych oraz $A = \bigcup_{b \in B} A_b$, to istnieje funkcja z B na A . Co więcej możesz skorzystać z tego, że jeśli istnieją funkcje z A na B i z B na A , to istnieje bijekcja pomiędzy nimi.