

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 10.

7 listopada 2019

Zadania

1. Rozpatrzmy macierze $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Które z poniższych macierzy należą do przestrzeni $W = \text{lin}(A_1, A_2) \subseteq M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Niech $v_1, \dots, v_k$ będzie liniowo niezależnym układem wektorów w przestrzeni V nad ciałem K . Niech $w_1 = v_1$, oraz $w_i = v_i + v_{i-1}$ dla $i \in \{2, \dots, k\}$. Wykazać, że układ $w_1, \dots, w_k$ jest liniowo niezależny.
3. Niech $f_1, \dots, f_k$ będzie układem wielomianów w $K[x]$ nie zawierającym wielomianu zerowego oraz takim, że $\deg f_i \neq \deg f_j$ o ile $i \neq j$. Wykazać, że układ $f_1, \dots, f_k$ jest liniowo niezależny.
4. Rozpatrzmy $\mathbb{R}$ jako przestrzeń liniową nad $\mathbb{Q}$. Wykaż, że układ $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ jest w tej przestrzeni liniowo niezależny.
5. (·) Niech V i W będą podprzestrzeniami w $\mathbb{R}^5$.

$V = \text{lin}((10, 3, 9+s, 1, 2-s), (4, 1, 6, 1, 1), (2, 1, -1, -1, -2))$,
zaś W niech będzie przestrzenią rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} 3x_1 - 11x_2 + tx_3 - 8x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - 6x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Znaleźć $\dim V$ i $\dim W$ w zależności od $s, t \in \mathbb{R}$. Znaleźć wszystkie takie s, t , że $V = W$.

6. Niech V będzie przestrzenią rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} x + y + z + t + w = 0 \\ x - y + z - t + w = 0 \end{cases}$$

Uzupełnić, o ile to możliwe następujące układy wektorów do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^5$ wektorami należącymi do V .

- a) $(5, -1, 2, 1, 7), (2, 3, -6, -3, 4)$,
b) $(1, 2, 3, -2, -4), (6, 4, -5, -4, -1), (3, -2, -14, 2, 11)$.
7. Opisać układem równań liniowych przestrzeń:
a) $\text{lin}((4, 1, 2, -3), (2, 3, 1, -9), (2, -1, 1, 3), (6, 4, 3, -12))$,
b) $\text{lin}((5, 1, 9, 0, 2), (5, 2, -2, 5, -1), (4, 1, 5, 1, 1))$.
8. Podać przykład wektora $\alpha \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$, że układ $(2, 1, 3), (1, 4, 5), \alpha$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
9. (·) Czy istnieje taki wektor $\beta \in \text{lin}((3, 5, 8), (-1, 3, 2))$, że układ $(2, 1, 3), (1, 4, 5), \beta$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$? Jeśli tak to podać taki wektor β .

10. (·) Nad ciałem liczb rzeczywistych rozpatrzmy czterowymiarową przestrzeń liniową wyrażen $H = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$. Na tej przestrzeni można zadać operację mnożenia wektorów postulując $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ oraz $ij = k = -ji$, $ki = j = -ik$ i $jk = i = -kj$. Tak zdefiniowana struktura nazywana jest strukturą kwaternionów.

- a) Znajdź wszystkie $v \in H$ takie że dla każdego $w \in H$, $vw = wv$.
- b) Sprawdź ile jest w tej strukturze pierwiastków z -1 , czyli wektorów $v \in H$, takich że $vv = -1$. Jaką powierzchnię w przestrzeni czterowymiarowej opisuje równanie $vv = -1$?

Praca domowa 3

1. Niech W_1, W_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni V nad ciałem K . Wykazać, że zbiór $W_1 \cap W_2$ jest podprzestrzenią przestrzeni V .
2. Dana jest w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ podprzestrzeń $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0\}$.
- a) Znajdź bazę i wymiar podprzestrzeni W .
- b) Uzupełnij znalezioną bazę do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^4$.
- c) Oblicz w znalezionej bazie $\mathbb{R}^4$ współrzędne wektora $(2, 0, 1, 8)$.
3. Dodatkowo dana jest przestrzeń

$$V_t = \text{lin}((1, 1, 1, -4), (-1, t, -t-2, t+5), (1, 1, 3, -10), (0, 0, 0, |t|-1)).$$

Rozstrzygnij:

- a) dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$, $V_t \subseteq W$ (każdy wektor przestrzeni V_t jest w przestrzeni W)?
- b) a dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$, $V_t = W$?
4. Znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^5$ rozpiętej na wektorach $(1, 1, -1, 2, 1), (2, 2, -3, 5, 2), (3, 3, -4, 7, 3)$. Następnie znaleźć układ równań jednorodnych opisujący tę podprzestrzeń.
5. Niech K będzie ciałem oraz niech $f_1, \dots, f_k \in F(X, K)$ dla pewnego zbioru X . Wykazać, że układ $f_1, \dots, f_k$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $x_1, \dots, x_k \in X$, że układ wektorów $v_1, \dots, v_k$, taki że $v_i = (f_1(x_i), f_2(x_i), \dots, f_k(x_i))$ dla $i \in \{1, \dots, k\}$, jest liniowo niezależny w K^k .