

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 10. – rozwiązania

7 listopada 2019

1. Rozpatrzmy macierze $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Które z poniższych macierzy należą do przestrzeni $W = \text{lin}(A_1, A_2) \subseteq M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Niech } M_1 = A_2 - A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ oraz } M_2 = A_2 - 4A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -7 & -3 \\ -5 & -17 & -10 \end{bmatrix}.$$

Widać, że $(M_1 - M_2)/3$ nie jest pierwszą macierzą, więc nie może być ona w W . $(7M_1 - M_2)/3$ to nie jest druga macierz i ona też nie należy do W . Trzecia macierz nie może być w W skoro jest różna od M_1 .

2. Niech $v_1, \dots, v_k$ będzie liniowo niezależnym układem wektorów w przestrzeni V nad ciałem K . Niech $w_1 = v_1$, oraz $w_i = v_i + v_{i-1}$ dla $i \in \{2, \dots, k\}$. Wykazać, że układ $w_1, \dots, w_k$ jest liniowo niezależny.

Rzeczywiście macierz, której wiersze to $w_1, \dots, w_k$ można prosto przy pomocy kolejnych $k-1$ operacji w postaci $r_{i+1} - r_i$ sprowadzić do macierzy, której wiersze to $v_1, \dots, v_k$. Ta zaś macierz sprowadzona do postaci schodkowej nie ma wiersza zerowego z powodu liniowej niezależności tych wektorów.

3. Niech $f_1, \dots, f_k$ będzie układem wielomianów w $K[x]$ nie zawierającym wielomianu zerowego oraz takim, że $\deg f_i \neq \deg f_j$ o ile $i \neq j$. Wykazać, że układ $f_1, \dots, f_k$ jest liniowo niezależny.

Założmy, bez straty ogólności, że $f_1, \dots, f_k$ są ustawione według malejącego stopnia. Założmy też, że dla pewnych $a_1, \dots, a_k$, $a_1 f_1 + \dots + a_k f_k = 0$. Można dowieść przez indukcję, że $a_1 = \dots = a_k = 0$. Rzeczywiście a_1 równa się zero, bo x w najwyższej potędze występuje tylko w f_1 , a całość musi się sumować do zera. Jeśli natomiast $a_1 = \dots = a_i = 0$ oraz $i < k$, to po usunięciu z wyrażenia $a_1 f_1 + \dots + a_k f_k$ wyrazów przemnożonych przez $a_1 = \dots = a_i = 0$ dostajemy, że x w najwyższej potędze występuje tylko w f_i , a skoro całość musi się sumować do zera, to $a_i = 0$. A zatem badany układ jest liniowo niezależny.

4. Rozpatrzmy $\mathbb{R}$ jako przestrzeń liniową nad $\mathbb{Q}$. Wykaż, że układ $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ jest w tej przestrzeni liniowo niezależny.

Założmy, że $p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3} = 0$ i nie wszystkie z p, q, r są zerami. Oczywiście to oznacza, że co najmniej dwie z nich nie są zerami. Zakładając, że r oraz q nie są zerami, że $\sqrt{6} = (p^2 - 2q^2 - 3r^2)/2qr$, jest liczbą wymierną, co oczywiście nie jest prawdą (aby to udowodnić, wystarczy założyć, że $\sqrt{6} = a/b$, gdzie a i b są całkowite i nie mają wspólnych dzielników, i wtedy $6b^2 = a^2$ – po rozpatrzeniu podzielności przez 6 dochodzimy do sprzeczności). Jeśli za to $q = 0$ oraz $r \neq 0$, to $\sqrt{3} = -p/r$ jest liczbą wymierną, a tak nie jest. W końcu, jeśli $r = 0$ oraz $q \neq 0$ to $\sqrt{2} = -p/q$ jest liczbą wymierną, co jest sprzecznością w ostatnim dostępnym przypadku, i kończy dowód.

5. (..) Niech V i W będą podprzestrzeniami w $\mathbb{R}^5$.

$$V = \text{lin}((10, 3, 9 + s, 1, 2 - s), (4, 1, 6, 1, 1), (2, 1, -1, -1, -2)),$$

zaś W niech będzie przestrzenią rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} 3x_1 - 11x_2 + tx_3 - 8x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - 6x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Znaleźć $\dim V$ i $\dim W$ w zależności od $s, t \in \mathbb{R}$. Znaleźć wszystkie takie s, t , że $V = W$.

Znajdujemy najpierw bazę i wymiar V :

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & 9+s & 1 & 2-s \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 10 & 3 & 9+s & 1 & 2-s \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - 5w_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 8 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 14+s & 6 & 12-s \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 2w_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 8 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2+s & 0 & 2-s \end{bmatrix}$$

Czyli jeśli $s = 2$, to $\dim V = 2$, a w przeciwnym wypadku $\dim V = 3$.

Przyjrzyjmy się teraz bazie i wymiarowi W . Znajdźmy rozwiązanie ogólne:

$$\begin{bmatrix} 3 & -11 & t & -8 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & -6 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & -6 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -11 & t & -8 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - 3w_1} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 6 & -3 & 15 & -3 \\ 0 & 4 & t-3 & 10 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & t-3 & 10 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 2w_2, w_1 + w_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mamy więc dwa przypadki: $t = 1$ i $t \neq 1$. Rozważmy je po kolei, niech $t = 1$, wtedy rozwiązaniem ogólnym (jako niewiadome ustalone bierzemy x_1 i x_3) jest $(3x_2 + x_4, x_2, 2x_2 + 5x_4 - x_5, x_4, x_5)$, czyli $\dim W = 3$, a baza to $(3, 1, 2, 0, 0), (1, 0, 5, 1, 0), (0, -1, 0, 1)$.

Jeśli natomiast $t \neq 1$, to mamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \cdot \frac{1}{t-1}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - w_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wtedy rozwiązaniem ogólnym (jako niewiadome ustalone bierzemy x_1, x_3 i x_5) jest $(3x_2 + x_4, x_2, 0, x_4, 2x_2 + 5x_4)$, czyli wtedy $\dim W = 2$ i baza to $(3, 1, 0, 0, 2), (1, 0, 0, 1, 5)$.

Odpowiedzmy teraz na drugie pytanie – kiedy $V = W$. Po pierwsze warunkiem koniecznym aby tak było jest, że $\dim V = \dim W$, mamy więc dwa przypadki:

- $\dim V = \dim W = 2$, czyli $s = 2, t \neq 1$, sprawdźmy zatem, czy wektory bazowe z V spełniają równania opisujące W . Niestety nie, bo nie spełniają równania $x_3 = 0$, czyli w tym wypadku na pewno $V \neq W$.
- $\dim V = \dim W = 3$, czyli $s \neq 2, t = 1$, sprawdźmy zatem, czy (ewentualnie dla jakiego s) wektory bazowe z V spełniają równania opisujące W :
 - pierwszy wektor: $(2, 1, -1, -1, -2)$, $2 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 = 2 - 3 + 0 + 1 + 0 = 0$ oraz $2 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-5) + (-2) \cdot 1 = 0 - 2 - 1 + 5 - 2 = 0$, czyli pierwszy wektor jest ok.
 - drugi wektor: $(0, -1, 8, 3, 5)$ $0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) + 8 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 = 3 - 3 = 0$ oraz $0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) + 8 \cdot 1 + 3 \cdot (-5) + 5 \cdot 1 = 2 + 8 - 15 + 5 = 0$, czyli drugi wektor też jest ok.
 - trzeci wektor: $(0, 0, -2 + s, 0, 2 - s)$ $0 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) + (-2 + s) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + (2 - s) \cdot 0 = 0$ oraz $0 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + (-2 + s) \cdot 1 + 0 \cdot (-5) + (2 - s) \cdot 1 = -2 + s + 2 - s = 0$, czyli trzeci wektor też jest ok (nawet dla każdego s).

Zatem odpowiedź brzmi $V = W$ wtedy i tylko wtedy, gdy $s \neq 2$ i $t = 1$.

6. Niech V będzie przestrzenią rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} x + y + z + t + w = 0 \\ x - y + z - t + w = 0 \end{cases}$$

Uzupełnić, o ile to możliwe następujące układy wektorów do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^5$ wektorami należącymi do V .

- a) $(5, -1, 2, 1, 7), (2, 3, -6, -3, 4),$
 b) $(1, 2, 3, -2, -4), (6, 4, -5, -4, -1), (3, -2, -14, 2, 11).$

W pierwszym podpunkcie nie mamy wyboru – potrzebujemy 3 wektorów, więc musimy dodać całą bazę V (która jest 3-wymiarowa). Wyjdzie z tego baza tylko i tylko wtedy, jeśli żaden z zadanych wektorów nie leży w przestrzeni V . Niestety – wektor $(2, 3, -6, -3, 4) \in V$, więc uzupełnienie jest niemożliwe. W drugim przypadku jest jeszcze gorzej, bo wszystkie 3 wektory leżą w V , więc uzupełnienie jest niemożliwe.

7. Opisać układem równań liniowych przestrzenie:

- a) $\text{lin}((4, 1, 2, -3), (2, 3, 1, -9), (2, -1, 1, 3), (6, 4, 3, -12)),$
 b) $\text{lin}((5, 1, 9, 0, 2), (5, 2, -2, 5, -1), (4, 1, 5, 1, 1)).$

Pierwszy podpunkt – znajdujemy bazę przestrzeni współczynników szukanego układu, rozwiązując układ równań:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -9 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 3 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -9 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 3 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - w_1, w_4 - 3w_1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -9 \\ 0 & -5 & 0 & 15 \\ 0 & -4 & 0 & 12 \\ 0 & -5 & 0 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{-1}{15}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 12 \\ 0 & -5 & 0 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - 3w_2, w_3 + 4w_2, w_4 + 5w_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Czyli rozwiązanie ogólne to $(a_1, 3a_4, -2a_1, a_4)$ i wymiar wynosi 2, czyli będą dwa równania. Wektory bazowe to $(1, 0, -2, 0), (0, 3, 0, 1)$, czyli to układ równań to:

$$x_1 - 2x_3 = 0, 3x_2 + x_4 = 0$$

No to drugi podpunkt – znajdujemy bazę przestrzeni współczynników szukanego układu, rozwiązując układ równań (zapiszmy współczynniki od końca):

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 9 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 + 2w_1, w_3 - w_1} \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 10 & 5 & 5 & 15 \\ 0 & 6 & 3 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{10}, w_1 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 6 & 3 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 6w_2, w_1 + 5w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Czyli rozwiązanie ogólne (pamiętamy, że zapisaliśmy wspak) to $(a_1, a_2, a_3, -\frac{3}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}a_3, -\frac{5}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 - \frac{9}{2}a_3)$, czyli wymiar wynosi 3 i przykładowa baza to $(2, 0, 0, -3, -5), (0, 2, 0, -1, -1), (0, 0, 2, -1, -9)$, czyli szukany układ równań to:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_4 - 5x_5 = 0 \\ 2x_2 - x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_3 - x_4 - 9x_5 = 0 \end{cases}$$

8. Podać przykład wektora $\alpha \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x + 2y - z = 0\}$, że układ $(2, 1, 3), (1, 4, 5), \alpha$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Bazą przestrzeni zadanej równaniem jest $(-2, 1, 0), (1, 0, 1)$ i jak łatwo sprawdzić pierwszy z nich jest niezależny od dwóch danych w zadaniu, więc może pełnić funkcję wektora α .

9. (.) Czy istnieje taki wektor $\beta \in \text{lin}((3, 5, 8), (-1, 3, 2))$, że układ $(2, 1, 3), (1, 4, 5), \beta$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$? Jeśli tak to podać taki wektor β .

Nie istnieje, bo jak łatwo zauważyć: $(3, 5, 8) = (2, 1, 3) + (1, 4, 5)$ i $(-1, 3, 2) = (1, 4, 5) - (2, 1, 3)$, a więc $\text{lin}((3, 5, 8), (-1, 3, 2))$ i $\text{lin}((2, 1, 3), (1, 4, 5))$ to ta sama płaszczyzna.

10. (★) Nad ciałem liczb rzeczywistych rozpatrzmy czterowymiarową przestrzeń liniową wyrażen $H = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$. Na tej przestrzeni można zadać operację mnożenia wektorów postulując $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ oraz $ij = k = -ji$, $ki = j = -ik$ i $jk = i = -kj$. Tak zdefiniowana struktura nazywana jest strukturą kwaternionów.

- a) Znajdź wszystkie $v \in H$ takie że dla każdego $w \in H$, $vw = wv$.

Ten zbiór to po prostu $\mathbb{R}$ (czyli $\{a + bi + cj + dk \in H : b = c = d = 0\}$). Rzeczywiście każda liczba rzeczywista ma tę własność. W drugą stronę, niech $v = a + bi + cj + dk$ ma badaną własność. Wtedy $vi = iv$, czyli $0 = iv - vi = 2cij + 2dik = 2ck - 2dj$, co implikuje, że $c = d = 0$. Podobnie $0 = jv - vj = 2djk + 2bji = 2di - 2bk$, zatem również $b = 0$.

- b) Sprawdź ile jest w tej strukturze pierwiastków z -1 , czyli wektorów $v \in H$, takich że $vv = -1$. Jaką powierzchnię w przestrzeni czterowymiarowej opisuje równanie $vv = -1$?

Zauważmy, że $v^2 = (a + bi + cj + dk)^2 = a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2abi + 2acj + 2adk$. Zatem, aby $v^2 = -1$ musi zachodzić:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = -1 \\ 2ab = 0 \\ 2ac = 0 \\ 2ad = 0 \end{cases}$$

Trzy ostatnie równania implikują $a = 0$ lub $b = c = d = 0$, z czego jeśli $b = c = d = 0$ dostajemy sprzeczność w pierwszym równaniu. Zatem $a = 0$ i $b^2 + c^2 + d^2 = 1$, co opisuje sferę o promieniu jeden w trójwymiarowej podprzestrzeni $\text{lin}((0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)) \subseteq \mathbb{R}^4$.