

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 10. – rozwiązania pracy domowej 3

7 listopada 2019

1. Niech W_1, W_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni V nad ciałem K . Wykazać, że zbiór $W_1 \cap W_2$ jest podprzestrzenią przestrzeni V .

Rzeczywiście, dla $v, w \in W_1 \cap W_2$ mamy $v + w \in W_1$ oraz $v + w \in W_2$, a więc $v + w \in W_1 \cap W_2$. Podobnie, jeśli $a \in K$ oraz $v \in W_1 \cap W_2$, to $av \in W_1$ oraz $av \in W_2$, a więc $av \in W_1 \cap W_2$.

2. Dana jest w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ podprzestrzeń $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0\}$.

- Znajdź bazę i wymiar podprzestrzeni W .
- Uzupełnij znalezioną bazę do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^4$.
- Oblicz w znalezionej bazie $\mathbb{R}^4$ współrzędne wektora $(2, 0, 1, 8)$

Oczywiście rozwiązaniem podanego równania na W jest $x_1 = 2x_2 + 3x_3 + x_4$, a zatem rozwiązanie ogólne to $(2x_2 + 3x_3 + x_4, x_2, x_3, x_4)$. A zatem baza to $(2, 1, 0, 0), (3, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)$, a $\dim W = 3$.

Widać, że dodanie do tej bazy wektora $(1, 0, 0, 0)$ powoduje, że bardzo łatwo macierz z tymi wektorami w wierszach sprowadzić do postaci schodkowej, a zatem $(2, 1, 0, 0), (3, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0)$ to baza $\mathbb{R}^4$.

Obliczamy współrzędne wektora $(2, 0, 1, 8)$ rozwiązując układ równań:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_3 - 3w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_4 - w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 9 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_4 \cdot (-1)} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_3 - w_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 \end{array} \right] \end{aligned}$$

A zatem współrzędne tego wektora to $0, 1, 8, -9$ i rzeczywiście $(2, 0, 1, 8) = 0 \cdot (2, 1, 0, 0) + 1 \cdot (3, 0, 1, 0) + 8(1, 0, 0, 1) - 9(1, 0, 0, 0)$.

3. Dodatkowo dana jest przestrzeń

$$V_t = \text{lin}((1, 1, 1, -4), (-1, t, -t - 2, t + 5), (1, 1, 3, -10), (0, 0, 0, |t| - 1)).$$

Rozstrzygnij:

- dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$, $V_t \subseteq W$ (każdy wektor przestrzeni V_t jest w przestrzeni W)?
- a dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$, $V_t = W$?

Znajdźmy teraz bazę V_t :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & t & -t-2 & t+5 \\ 1 & 1 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & |t|-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 + w_1, w_3 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & t+1 & -t-1 & t+1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & |t|-1 \end{bmatrix}$$

I już widać, że jeśli $t \neq 1, -1$ to $\dim V = 4$. Jeśli $t = 1$, to $\dim V = 3$, zaś jeśli $t = -1$, to w ogóle $\dim V = 2$.

A zatem $V_t \subseteq W$ może się zdarzyć tylko jeśli $t = 1$ lub $t = -1$. Sprawdźmy, czy te wektory spełniają równanie na W :

- $(1, 1, 1, -4)$ spełnia
- $(0, 0, 2, -6)$ spełnia
- $(0, t+1, -t-1, t+1)$ spełnia niezależnie od t ,
- $(0, 0, 0, |t|-1)$ spełnia dla $t = 1$ lub $t = -1$.

A zatem $V_t \subseteq W$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t = 1$ lub $t = -1$.

Aby $V_t = W$ dodatkowo muszą się zgadzać wymiary, a więc ta równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $t = 1$.

4. Znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^5$ rozpiętej na wektorach $(1, 1, -1, 2, 1), (2, 2, -3, 5, 2), (3, 3, -4, 7, 3)$. Następnie znaleźć układ równań jednorodnych opisujący tę podprzestrzeń.

Znajdujemy bazę:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & -4 & 7 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - 3w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - w_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A zatem baza to $(1, 1, -1, 2, 1), (0, 0, -1, 1, 0)$, a wymiar badanej podprzestrzeni to 2. Kontynuujemy tym razem rozwiązywanie układu równań na współczynniki szukanego układu równań:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 + w_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

A zatem rozwiązanie ogólne to $a = -b - d - e, c = d$, czyli w postaci parametrycznej: $(-b - d - e, b, d, d, e)$. A zatem baza przestrzeni współczynników to $(-1, 1, 0, 0, 0), (-1, 0, 1, 1, 0), (-1, 0, 0, 0, 1)$ a zatem odpowiadający jej szukany układ równań to:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + z + t = 0 \\ -x + w = 0 \end{cases}$$

5. Niech K będzie ciałem oraz niech $f_1, \dots, f_k \in F(X, K)$ dla pewnego zbioru X . Wykazać, że układ $f_1, \dots, f_k$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $x_1, \dots, x_k \in X$, że układ wektorów $v_1, \dots, v_k$, taki że $v_i = (f_1(x_i), f_2(x_i), \dots, f_k(x_i))$ dla $i \in \{1, \dots, k\}$, jest liniowo niezależny w K^k .

Wpierw pokażemy, że jeśli $M \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$ to wektory będące wierszami tej macierzy stanowią układ liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy gdy wektory będące kolumnami tej macierzy stanowią układ liniowo niezależny. Ze względu na symetrię sytuacji wystarczy pokazać jedną z implikacji. Załóżmy zatem, że wiersze są liniowo niezależne. Dążąc ku sprzeczności założmy również, że mnożąc kolumny tej macierzy przez odpowiednio współczynniki $a_1, \dots, a_k$ (z czego nie wszystkie a_i są zerowe) dostaniemy wektor zerowy. Po sprowadzeniu macierzy do postaci schodkowej nie zobaczymy wiersza zerowego, a więc w każdej kolumnie znajdzie się schodek. Wynik kombinacji tych kolumn ze współczynnikami $a_1, \dots, a_k$ nie zmieni się w wyniku kombinacji na wierszach, czyli nadal wyniesie zero, co stanowi sprzeczność.

Ustalmy $x_1, \dots, x_k$. Rozpatrując macierz, w której w i -tej kolumny w j -tym wierszu wpisujemy $f_i(x_j)$ widzimy, że wektory postaci v_i są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy liniowo niezależne są wektory

$w_i = (f_i(x_1), \dots, f_i(x_k))$ dla $i = 1, \dots, k$ są liniowo niezależne. Mamy też, że $f_1, \dots, f_k$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a_1, \dots, a_k$, nie wszystkie zerowe, że dla każdego $x \in X$, $a_1 f_1(x) + \dots + a_k f_k(x) = 0$, a zatem dla dowolnych $x_1, \dots, x_k$, $a_1 w_1 + \dots + a_k w_k = 0$.

W drugą stronę, jeśli f_i są liniowo niezależne, to dla każdych $a_1, \dots, a_k$, nie wszystkich zerowych istnieje x , że $a_1 f_1(x) + \dots + a_k f_k(x) \neq 0$. Wobec tego istnieją $x_1, \dots, x_n$, że w_i są liniowo niezależne. Prosty argument indukcyjny wystarcza do uzasadnienia tego faktu. Rzeczywiście dla $k = 1$ wystarczy wziąć x_1 takie, że $f_1(x_1) \neq 0$. Zakładając, że wybraliśmy $x_1, \dots, x_l$, niech x_{l+1} będzie taki, że $f_{l+1}(x_{l+1}) \neq a_1 f_1(x_1) + \dots + a_l f_l(x_l)$, gdzie $a_1, \dots, a_l$ są takie, że dla każdego $1 \leq j \leq l$, $f_{l+1}(x_j) = a_1 f_1(x_j) + \dots + a_l f_l(x_j)$, gdzie $a_1, \dots, a_l$ istnieją i są jednoznacznie wyznaczone, bo $(f_i(x_1), \dots, f_i(x_l))$ są liniowo niezależne (a więc są bazą K^l) na mocy założenia indukcyjnego, a zatem x_{l+1} też istnieje skoro $f_1, \dots, f_{l+1}$ są liniowo niezależne. Dostajemy, że $(f_i(x_1), \dots, f_i(x_l), f_i(x_{l+1}))$ są liniowo niezależne, co kończy krok indukcyjny.