

# Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

## ćwiczenia 1.

3 lub 4 października 2019

### Ogólne informacje

**Prowadzący:** Michał Korch, m\_korch@mimuw.edu.pl,  
MIMUW, pok. 5310  
Strona: [www.mimuw.edu.pl/~m\\_korch/pl/category/teaching/gal/](http://www.mimuw.edu.pl/~m_korch/pl/category/teaching/gal/)

### Literatura:

- Wykłady z algebry liniowej, T. Koźniewski, UW, 2003,
- Algebra liniowa z geometrią, A. Białynicki-Birula, PWN, 1976

**Zasady:** Zaliczenie jest na podstawie dwóch kolokwiów po 100 punktów, zadań domowych (40) i punktów za aktywność na zajęciach (20).

### Zadania

1. ( $\cdot$ ) Który z następujących układów jest jednorodny, który sprzeczny, a który ma jednoznaczne rozwiązanie (jest oznaczony)?

$$U_1 : \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases},$$

$$U_2 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases},$$

$$U_3 : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_2 - x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 8x_2 + 7x_3 = -4 \end{cases},$$

$$U_4 : x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5.$$

2. Które z ciągów  $(-1, 1, 1, -1)$ ,  $(2, 3, 1, 4)$ ,  $(4, -3, 2, 1)$ ,  $(4, 0, -3, \frac{1}{2})$  są rozwiązaniami poniższego układu równań?

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 3 \\ 5x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

3. ( $\cdot$ ) Znaleźć rozwiązanie ogólne poniższego układu równań.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 13x_2 + 11x_3 + 12x_4 = 8 \end{cases}$$

4. Znaleźć rozwiązanie ogólne poniższego układu równań.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

5. Dla jakich  $t \in \mathbb{R}$  ciąg  $(1, t, 3, 2t)$  jest rozwiązaniem poniższego układu równań?

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 5 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 16 \end{cases}$$

6. Dla jakich  $s \in \mathbb{R}$  układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 7 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = s \end{cases}$$

jest niesprzeczny?

7. Niech  $w(x)$  będzie wielomianem 3. stopnia spełniającym warunki:  $w(0) = -1$ ,  $w(1) = 3$ ,  $w(2) = 7$ ,  $w(-1) = -5$ . Znaleźć współczynniki wielomianu  $w(x)$ .
8. Trzech braci Antoni, Bonifacy i Cezary mają w sumie 100 lat, a 10 lat temu zachodziła sytuacja, że Antoni miał tyle lat, co suma wieku Bonifacego i połowa wieku Cezarego. Czy możliwe jest, że suma czterokrotności wieku Antoniego sprzed 25 lat i wieku Cezarego obecnie wynosić będzie również 100 lat?
9. Czy istnieje trójmian kwadratowy  $w(x)$  przyjmujący wartości:  $w(-2) = 2$ ,  $w(3) = 10$  posiadający oba pierwiastki rzeczywiste, których iloczyn wynosi  $-3$ ? *Wskazówka: skorzystaj ze wzorów Viete'a.*
10. ( $\star$ ) Rozważmy wielomian  $w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ , w którym współczynniki  $a, b, c, d$  są liczbami wymiernymi. Wiadomo, że  $w(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$  oraz  $w(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ . Wyznaczyć współczynniki tego wielomianu.