

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 1. – rozwiązania

3 lub 4 października 2019

1. Który z następujących układów jest jednorodny, który sprzeczny, a który ma jednoznaczne rozwiązanie (jest oznaczony)?

$$U_1 : \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases},$$

$$U_2 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases},$$

$$U_3 : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_2 - x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 8x_2 + 7x_3 = -4 \end{cases},$$

$$U_4 : x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5.$$

U_1 nie jest jednorodny, nie jest sprzeczny i jest oznaczony (jedyne rozwiązanie to 2, 3).

U_2 jest jednorodny, nie jest sprzeczny i nie jest oznaczony (za mało równań by miał szansę być).

U_3 nie jest jednorodny, i jest sprzeczny (sprzeczność stanowią 1. i 3. równania).

U_4 nie jest ani jednorodny, ani sprzeczny, ani oznaczony.

2. Które z ciągów $(-1, 1, 1, -1)$, $(2, 3, 1, 4)$, $(4, -3, 2, 1)$, $(4, 0, -3, \frac{1}{2})$ są rozwiązaniami poniższego układu równań?

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 3 \\ 5x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

$(-1, 1, 1, -1)$ nie spełnia 3. równania, $(2, 3, 1, 4)$ nie spełnia 1., $(4, -3, 2, 1)$ nie spełnia 3, a ostatnie jest rozwiązaniem.

3. Znaleźć rozwiązanie ogólne poniższego układu równań.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 13x_2 + 11x_3 + 12x_4 = 8 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 9 & 2 & 4 \\ 4 & 13 & 11 & 12 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - 4w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -8 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - 2w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$
$$\xrightarrow{w_1 - 3w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -20 & 29 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

czyli rozwiązaniem ogólnym jest $\begin{cases} x_1 = 2 + 20x_3 - 29x_4 \\ x_2 = -7x_3 + 8x_4 \end{cases}$, w formie sparametryzowanej: $(2 + 20x_3 - 29x_4, -7x_3 + 8x_4, x_3, x_4)$.

4. Znaleźć rozwiązanie ogólne poniższego układu równań.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 3w_1, w_3 - 3w_1, w_4 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -3 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{w_3 - 2w_2, w_4 - w_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{w_3 \cdot (-1), w_1 + w_2, w_2 \cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 2w_3, w_1 \cdot \frac{1}{2}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

czyli rozwiązaniem ogólnym jest: $\begin{cases} x_1 = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_3 = 3 - 4x_5 \\ x_4 = 0 \end{cases}$, czyli w postaci sparametryzowanej:
 $(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_5, x_2, 3 - 4x_5, 0, x_5)$.

5. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ ciąg $(1, t, 3, 2t)$ jest rozwiązaniem poniższego układu równań?

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 5 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 16 \end{cases}$$

Podstawiamy i mamy:

$$\begin{cases} 3 + 2t + 3 - 2t = 6 \\ 2 + 5t - 9 - 4t = 5 \\ 1 - 4t + 15 + 4t = 16 \end{cases},$$

czyli:

$$\begin{cases} 6 = 6 \\ t = 12 \\ 16 = 16 \end{cases},$$

a więc jest to rozwiązanie tylko i tylko wtedy, gdy $t = 12$.

6. Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 7 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = s \end{cases}$$

jest niesprzeczny?

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 4 & s \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 3w_1, w_3 - w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & s - 2 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 + w_2} \\ & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s - 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Co oznacza, że układ jest niesprzeczny tylko i tylko wtedy, gdy $s = 1$.

7. Niech $w(x)$ będzie wielomianem 3. stopnia spełniającym warunki: $w(0) = -1, w(1) = 3, w(2) = 7, w(-1) = -5$. Znaleźć współczynniki wielomianu $w(x)$.
 Niech $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Z pierwszej tożsamości wiadomo, że $d = -1$. Pozostałe równości dają nam następujący układ równań:

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ 8a + 4b + 2c = 8 \\ -a + b - c = -4 \end{cases},$$

który to układ łatwo rozwiązać dostając $a = 0, b = 0, c = 4$, czyli mamy do czynienia z wielomianem $4x - 1$.

8. Trzech braci Antoni, Bonifacy i Cezary mają w sumie 100 lat, a 10 lat temu zachodziła sytuacja, że Antoni miał tyle lat, co suma wieku Bonifacego i połowa wieku Cezarego. Czy możliwe jest, że suma czterokrotności wieku Antoniego sprzed 25 lat i wieku Cezarego obecnie wynosić będzie również 100 lat? Sprowadza się to do sprawdzenia, czy układ:

$$\begin{cases} a + b + c = 100 \\ 2a - 2b - c = -10 \\ 4a + c = 200 \end{cases}$$

jest niesprzeczny. A sprzeczny jest.

9. Czy istnieje trójmian kwadratowy $w(x)$ przyjmujący wartości: $w(-2) = 2, w(3) = 10$ posiadający oba pierwiastki rzeczywiste, których iloczyn wynosi -3 ?

Zakładając, że nasz trójmian to $ax^2 + bx + c$, te trzy informacje dają układ równań:

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = 10 \\ 3a + c = 0 \end{cases}$$

Zapisujemy macierz układu, dla uproszczenia rachunków kolumny w kolejności c, a, b i sprowadzamy do postaci schodkowej zredukowanej:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & 9 & 3 & 10 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{w_2 - w_1, w_3 - w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 + 5w_2} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 15 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 \cdot \frac{1}{15}, w_2 \cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{15} \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 + 2w_3, w_2 + 2w_3} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & \frac{26}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{26}{15} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{15} \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 4w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-26}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{26}{15} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{15} \end{array} \right] \end{aligned}$$

A zatem taki trójmian istnieje i jest to $\frac{26}{15}x^2 - \frac{2}{15}x - \frac{26}{5}$.

10. (★) Rozważmy wielomian $w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, w którym współczynniki a, b, c, d są liczbami wymiernymi. Wiadomo, że $w(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ oraz $w(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$. Wyznaczyć współczynniki tego wielomianu.

Podstawiając $\sqrt{2}$ oraz $\sqrt{3}$ dostaję $\sqrt{2} = 4 + 2a\sqrt{2} + 2b + c\sqrt{2} + d$ oraz $\sqrt{3} = 9 + 3a\sqrt{3} + 3b + c\sqrt{3} + d$. A zatem: $\sqrt{2}(1 - 2a - c) = 4 + 2b + d$ oraz $\sqrt{3}(1 - 3a - c) = 9 + 3b + d$. Jeśli jednak $1 - 2a - c \neq 0$, to otrzymuję, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną. A zatem $2a + c = 1$. Podobnie $3a + c = 1$. W takim razie $4 + 2b + d = 0$ oraz $9 + 3b + d = 0$, czyli dostaję następujący układ równań i go rozwiązuję (zapisując w kolejności d, c, b, a):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - w_1, w_4 - w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 2w_2, w_3 - 2w_4}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

A zatem poszukiwany wielomian to $w(x) = x^4 - 5x^2 + x + 6$.