Kombinowanie o nieskończoności.
1. Jak zliczyć
materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Michał Korch

1 marzec 2018

Szybkie przypomnienie z wykładu

Prezentacja multimedialna do wykładu.

Permutacje, kombinacje, wariacje

Permutacje to liczenie liczby możliwych ustawień kolejności jakiegoś zbioru elementów. Elementy zbioru n-elementowego można ustawić w n-elementowe ciągi elementów (bez powtórzeń) na $n!$ sposobów, gdzie $n! = 1 \cdot \ldots n$.

Wariacje bez powtórzeń to nieco bardziej ogólne zadanie. Ze zbioru n-elementowego wybieramy k-elementowe ciągi (bez powtórzeń). Można to zrobić na:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

sposobów.

Wariacje z powtórzeniami to wybór ze zbioru n-elementowego k-elementowego ciągu, w którym elementy mogą się powtarzać. Można więc to zrobić na

$$W_n^k = n^k$$

sposobów.

Kombinacje bez powtórzeń to wybór ze zbioru n-elementowego k-elementowego podzbioru (a więc bez powtórzeń i nie liczy się kolejność elementów). Łatwo zauważyć, że

$$C_n^k \cdot k! = V_n^k,$$

gdzie C_n^k to liczba kombinacji bez powtórzeń. A zatem

$$C_n^k = \frac{v_n^k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}.$$

To ostatnie oznaczenie jest nazywane symbolem Newtona.

W końcu **kombinacje z powtórzeniami** to zadanie wyboru ze zbioru n-elementowego kolekcji k-elementowej, w której jednak elementy mogą mieć krotności (ale nie liczy się kolejność).

Jest to równoważne zadaniu polegającym umieszczeniu k elementów w n pudłach. Doszliśmy do wniosku, że można to zrobić na

$$K_n^k = \binom{n+k-1}{n-1}$$

sposobów.

Podsumowując mamy, co następuje

	wariacje (kolejność)	kombinacje (bez kolejności)
bez powtórzeń	$V_n^k = n!/(n-k)!$	$C_n^k = \binom{n}{k}$
z powtórzeniami	$W_n^k = n^k$	$K_n^k = \binom{n+k-1}{n-1}$

Trójkąt Paskala

Opowiadając bajkę o stadzie n małp wybierającą k-osobową ekipę do poszukiwania nowego żerowiska, udowodniliśmy, że

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Z tego faktu oraz z tego, że dla każdego n,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

wynika, że symbole Newtowna $\binom{n}{k}$ można przedstawić w poniższym trójkącie, zwanym trójkątem Pascala, w którym każdy element jest sumą elementów nad nim i nad nim na lewo.

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$n=0$	1							
$n=1$	1	1						
$n=2$	1	2	1					
$n=3$	1	3	3	1				
$n=4$	1	4	6	4	1			
$n=5$	1	5	10	10	5	1		
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1	
$n=7$	1	7	21	35	35	21	7	1

Przy okazji udowodniliśmy, że dla każdego n,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Zasada szufladkowa Dirichleta

Bardzo prosty fakt kombinatoryczny, a jednak o niesamowitej liczbie zastosowań w dowodach wcale niebanalnych matematycznych faktów sformułowaliśmy następująco: jeśli n małp śpi na k drzewach, oraz $k < n$ to na co najmniej jednym drzewie śpią co najmniej dwie małpy.

1 Zadania łatwe

1. Oblicz:
$$\binom{8}{3}, \binom{2018}{0}, \binom{2018}{1}, \binom{9}{5}, \binom{2018}{2018}.$$

2. Określ, czy w następującym zadaniu mowa o wariacjach, czy o kombinacjach, z czy bez powtórzeń oraz oblicz. Ile różnych pięcio-literowych słów (też bez sensu) można utworzyć z liter wyrażenia AGRESYWNA MAŁPA,

   a) jeśli każdej litery możemy użyć wielokrotnie?

   b) jeśli każde stworzone słowo musi się składać z różnych liter?

3. Określ, czy w następującym zadaniu mowa o wariacjach, czy o kombinacjach, z czy bez powtórzeń oraz oblicz. Z każdego słowa, o którym mowa w poprzednim zadaniu w podpunkcie a) tworzymy statystykę o tym ile i jakich liter w nim występuje.

   a) Ile różnych statystyk możemy dostać?

   b) A ile możemy dostać statystyk, jeśli każde stworzone słowo musiało się składać z różnych liter?

4. Określ, czy w następującym zadaniu mowa o wariacjach, czy o kombinacjach, z czy bez powtórzeń oraz oblicz.

   a) Pięć nierozróżnialnych małp siedzi na 8-miu kolejnych drzewach. Ile takich sytuacji istnieje?

   b) a ile sytuacji zaobserwuje wytrawny biolog, który będzie potrafił rozróżnić wszystkie małpy?

5. W części z zadań na tej liście, ale też w dalszej części naszych zajęć będziemy używać notacji sumy $\sum$ zręcznie zastępującą $+ \ldots +$. Na przykład:
$$\sum_{i=1}^{2018} 2 \cdot i^2 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + \ldots + 2 \cdot 2018^2.$$
Aby zapoznać się z tą notacją, oblicz następujące sumy:
$$\sum_{i=5}^{10} i,$$
$$\sum_{i=0}^{4} (i^2 + i),$$
$$\sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i}.$$

6. Niech $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Ile jest podzbiorów zbioru A? Ile jest cztero-elementowych podzbiorów zbioru A? Ile jest cztero-elementowych pobzbiorów zbioru A, składających się z trzech liczb nieparzystych i jednej parzystej?

7. Drużyna piłkarska Legii Warszawa 4 marca 2018 roku rozegra mecz z Lechem Poznań, trener ma do dyspozycji 30 zawodników. Na ile sposobów może wybrać drużynę wyjściową składającą się z 11 zawodników? A ile będzie możliwości jeśli dodatkowo założymy, że ma do dyspozycji 3 bramkarzy, 10 obrońców, 10 pomocników oraz 7 napastników i gra ustawieniem: $1-4-4-2$?

8. Rozwiń wyrażenia
$$(a+b)^3$$
oraz
$$(a+b)^4$$
oraz porównaj wyniki z liczbami z trójkąta Pascala. Czy jesteś w stanie na tej podstawie sformułować swoje przewidywania na temat kolejnych potęg? Sformułowałaś/eś prawdopodobnie wzór dwumianowy Newtona!

9. Posługując się spostrzeżeniami z poprzedniego zadania, rozwiń:
$$(a+2b)^4,$$
$$(a-b)^6,$$
$$(3a+1)^5.$$

10. Mamy do wysłania (w sumie) dwanaście identycznych listów, i musimy je wysłać do czterech osób. Na ile sposobów można to zrobić? Na ile sposobów można to zrobić przy założeniu, że każda osoba otrzyma co najmniej dwa listy?
Wskazówka: Kombinacje z powtórzeniami.

11. Udowodnij (opowiadając historię), że dla każdych n, r, $r \le n$,
$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$
Sprawdź też powyższy wzór korzystając z algebraicznej definicji symbolu Newtona.

12. Korzystając z zasady szufladkowej Dirichleta, udowodnij, że wśród trzech licz całkowitych zawsze są dwie, który suma jest liczbą parzystą.

13. Ile dzielników ma liczba 6000?
Wskazówka: $6000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3$.

14. Udowodnij, że dla każdych k, r, $k \le r$, zachodzi
$$k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}.$$

15. Udowodnij, że dla każdych k, r, $k \le r$, zachodzi
$$(r-k)\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k}.$$

2 Zadania trochę mniej łatwe niż łatwe

1. Ile można otrzymać różnych mieszanek składających się z 10 cukierków, jeśli mamy do dyspozycji 4 rodzaje cukierków w nieograniczonych ilościach?

2. Udowodnij, korzystając z algebraicznej definicji symbolu Newtona, że dla każdego n, k, $k \leq n$,
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

3. Udowodnij prawidłowość sformułowaną w zadaniu 8 z zadań łatwych.
Wskazówka: Napiszmy $(a+b)^n = (a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)$. *Chcąc otrzymać wyraz* $a^k b^{n-k}$ *przy wymnażaniu wybieram* k *razy* a *z wyrażenia* $(a+b)$.

4. Udowodnij, korzystając ze wzoru dwumianowego (patrz poprzednie zadanie), że dla każdego n,
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$
Wskazówka: Niech $a = b = 1$.

5. Czemu jest równe 11^4? Dlaczego ta liczba jest łatwa do wyliczenia dla osoby, która zna wzór dwumianowy Newtona?

6. Rozważ, ile wynosi
$$\sum_{i=0}^{3} i,$$
$$\sum_{i=0}^{4} i,$$
$$\sum_{i=0}^{5} i.$$
Czy jesteś w stanie policzyć, ile wynosi
$$\sum_{i=0}^{2017} i$$
oraz
$$\sum_{i=0}^{2018} i?$$
Wskazówka: Połącz w pary elementy tych sum: pierwszy z ostatnim, drugi z przedostatnim, itd.

7. Czy jesteś w stanie podać wzór działający dla każdego n, na
$$\sum_{i=0}^{n} i?$$
Wskazówka: Połącz elementy tej sumy w pary: $0+n$, $1+(n-1)$, *etc. Aby policzyć ile będzie takich par, i czy zostanie coś bez pary rozważ przypadek* n *parzystego oraz* n *nieparzystego.*

8. Udowodnij, opowiadając historię, że dla każdych r, m, k takich, że $m \le r, k \le m$, mamy

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}.$$

9. Udowodnij, zastanawiając się nad kombinatorycznymi aspektami, że dla każdego n,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Wskazówka: Ile jest podzbiorów zbioru n-elementowego?

10. Udowodnij, opowiadając historię, że dla każdych r, s, m, n takich, że $r + s \ge m + n$ mamy

$$\sum_{k=\max(-m,n-s)}^{\min(r-m,n)} \binom{r}{m+k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n}.$$

11. Udowodnij, nic nie licząc, że

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot k = n \cdot 2^{n-1}.$$

Wskazówka: Samiec alpha stada n małp wybiera małpy, które pójdą szukać bananów – oraz przywódcę tej ekipy.

12. Udowodnij, nic nie licząc, że

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \cdot k(k-1) = n(n-1) \cdot 2^{n-2}.$$

Wskazówka: Zmodyfikuj dowód z poprzedniego zadania.

13. Ile liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 99999\}$ ma taką własność, że suma ich cyfr wynosi 7?
Wskazówka: Mamy siedem jedności i musimy te jedności rozdzielić w dowolny sposób na 5 możliwych pozycji cyfr w liczbie.

14. Na ile sposobów można umieścić 14 kul w 3 pudełkach, ale tak, by w co najmniej jednym z nich było co najmniej 8 kul?

   a) Załóż, że kule są nierozróżnialne (są takie same), natomiast pudełka są (np. są ponumerowane).

   b) Załóż, że zarówno kule, jak i pudełka są nierozróżnialne.
   Wskazówka: Zauważ, że w dokładnie jednym pudełku będzie co najmniej 8 kul. Więc to pudełko jest wyróżnione. Ustalmy, że poza tymi ośmioma, włożymy do niego jeszcze k kul. Ile jest sposobów podziału pozostałych $6 - k$ kul na dwa pudełka (rozważ parzystość k).

15. Na ile sposobów można umieścić 14 kul w 3 pudełkach, ale tak, by w co najmniej jednym z nich było nie więcej niż 7 kul?
Wskazówka: Zastosuj wynik z poprzedniego zadania.

16. Niech A będzie pewnym dziesięcio-elementowym podzbiorem zbioru $\{1, \ldots, 50\}$. Udowodnij, że istnieją dwa różne pięcio-elementowe podzbiory A o takiej samej sumie elementów. *Wskazówka: Policz liczbę możliwych pięcioelementowych podzbiorów oraz liczbę możliwych sum ich elementów i skorzystaj z zasady szufladkowej Dirichleta.*

17. Oblicz
$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i i,$$
dla dowolnego n.

18. Oblicz
$$1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i},$$
dla dowolnego n.

19. Oblicz
$$\sum_{k=1}^{2018} \frac{1}{k(k+1)}.$$
Wskazówka: Zapisz $\frac{1}{k(k+1)}$ w postaci $\frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$.

20. Oblicz
$$\sum_{k=1}^{2018} \frac{1}{(k+1)(k+3)}.$$
Wskazówka: Patrz poprzednie zadanie.

21. Oblicz
$$\sum_{k=1}^{2018} \frac{1}{k(k+3)(k+4)}.$$
Wskazówka: Patrz poprzednie zadanie.

22. Udowodnij, że nie można umieścić na trójkącie równobocznym o boku 2 pięciu punktów, takich, że dystans między dowolnymi dwoma punktami jest zawsze większy od 1. Skorzystaj z zasady szufladkowej Dirichleta.

23. Udowodnij, nic nie licząc, że
$$K_3^n = \sum_{i=0}^{n} K_2^{n-i}.$$

3 Zadania trudniejsze

1. Udowodnij, że dla każdego n,
$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} = 0.$$
Wskazówka: Zastosuj wzór dwumianowy Newtona.

2. Udowodnij, że dla każdego n,
$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} 2^r = 3^n.$$

3. Udowodnij, że dla każdego m, n, $m \leq n$ zachodzi

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Wskazówka: Zastanów się nad sposobami wyboru $m+1$-elementowych podzbiorów ze zbioru $n+1$-elementowego. Podziel te możliwe podzbiory ze względu na największy element.

4. Ile jest liczb pomiędzy 0, a 999, których suma cyfr jest równa 20?
Wskazówka: Przyjrzyj się zadaniu 13 z zadań trochę mniej łatwych niż łatwe, ale pamiętaj, że liczby $10, 11, \ldots$ nie są cyframi! Dlatego przeanalizuj też zadanie 15 z zadań trochę mniej łatwych niż łatwe.

5. Niech p będzie liczbą naturalną, a $a_1, \ldots, a_p$ dowolnym ciągiem p liczb całkowitych. Udowodnij, że suma pewnych z liczb $a_1, \ldots, a_p$ jest wielokrotnością liczby p.
Wskazówka: Zastosuj zasadę szufladkową Dirichleta. Rozważ reszty z dzielenia przez p liczb ze zbioru:

$$\{0, a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_p\}.$$

6. Ciąg Fibonacci'ego $\langle f_n \rangle$ zdefiniowany jest następująco: $f_0 = 0, f_1 = 1$, oraz dla każdego $n > 0$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Udowodnij, że dla każdego n,

$$f_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i}.$$

7. Oblicz

$$\sum_{k=1}^{2018} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}.$$

Wskazówka: Zapisz $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ jako różnicę dwóch ułamków. W tym celu najpierw przemnóż licznik i mianownik przez pewne wyrażenie.

8. Udowodnij nic nie licząc, że dla każdych n, k, $k \leq n$, zachodzi:

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} = \sum_{i=1}^{n-(k-1)} \binom{n-i}{k-1} 2^{i-1}.$$

Wskazówka: Pomyśl o k-tym elemencie wybieranego zbioru.

9. Udowodnij nic nie licząc, że dla każdego n, zachodzi:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n} 2^k = 4^n.$$

Wskazówka: Zauważ, że jeśli wybieram zbiór ze zbioru $2n$-elementowego, to wybierany zbiór lub jego dopełnienie będzie mieć co najmniej n elementów. Następnie postępuj podobnie, jak w poprzednim zadaniu.

Zadania inspirowane: [5], [4], [2], notatki i pomysły Michała Korcha, [1].

Literatura dodatkowa

[1] Martin Aigner and Guenter Ziegler. *Dowody z Księgi*. PWN, Warszawa, 2002. rozdział 21.

[2] Bogdan Chlebus. Matematyka dyskretna – skrypt. rozdziały 2, 3, 4.

[3] Tony Crilly. *50 teorii matematyki*. PWN, Warszawa, 2009. rozdział: 41.

[4] Ronald Graham, Donald Knuth, and Oren Patashnik. *Matematyka konkretna*. PWN, Warszawa, 1998. rozdziały 2 i 5.

[5] Kenneth Ross and Charles Wrigth. *Matematyka dyskretna*. PWN, Warszawa, 1999. rozdział 5.