Geometrie Wszechświata.
5. Czwarty wymiar
materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Michał Korch

30 marzec 2017

Prezentacja multimedialna do wykładu.

1 Zadania łatwe

1. Narysuj na kartce rysunek (dwuwymiarowy rzut) czterowymiarowej kostki, tak aby krawędzie w każdym z czterech kierunków były narysowane innym kolorem. Policz wierzchołki, krawędzie, ściany dwuwymiarowe i ściany trzywymiarowe. Znajdź na rysunku poszczególne ściany trzywymiarowe.

2. Zagraj z koleżanką/kolegą w kółko i krzyżyk w sześcianie $3 \times 3 \times 3$. Każde kółko i krzyżyk będzie zajmować wnętrze sześcianiku $1 \times 1 \times 1$ (a więc jest 9 takich pól). Wygrywa ten, kto jako pierwszy będzie miał 3 swoje znaki pionowo, poziomo, wgłąb lub wzdłuż dowolnej przekątnej. Najłatwiej narysować sobie 3 kwadraty 3×3 i umówić się, że w rzeczywistości stoją jeden za drugim. Następnie spróbuj takiej rozgrywki w sześcianie $4 \times 4 \times 4$.

3. Niech będzie dany sześcian o boku 1cm. Na wykładzie rozmawialiśmy o sferach: opisanej na sześcianie (przechodzącej przez jego wierzchołki) oraz wpisanej w sześcian (czyli stycznej do jego ścian). Przypomnij sobie ile wynoszą promienie każdej z tych sfer. Można jeszcze wyróżnić trzecią sferę, która jest styczna do krawędzi sześcianu (a więc jest pomiędzy tymi dwoma). Ile wynosi jej promień?
Wskazówka: Zauważ, środek tej sfery to środek kwadratu leżącego w połowie sześcianu.

4. Jeśli $a^b = c$, to piszemy, że $b = \log_a c$. Dla uproszczenia zapisu, jeśli $a = 2$, to piszemy po prostu $\lg c$, a jeśli $a = 10$, to $\log c$. Wylicz (zgadnij) bez używania komputera:
   (a) $\log_2 4$,
   (b) $\lg 1024$,
   (c) $\log_3 81$,
   (d) $\log 1000000000$,
   (e) $\log_\pi \pi$.

5. Udowodnij, że $a^{\log_a c} = c$, dla dowolnych liczb a i b.

6. Sprawdź, że można pokryć sześcian cegiełkami (niezależnie od tego, jak bardzo są one małe) tak, żeby w jednym punkcie stykały się, co najwyżej cztery z nich (a więc wymiar pokryciowy sześcianu wynosi 3). Wykonaj odpowiedni rysunek.

2 Zadania trochę mniej łatwe niż łatwe

1. Ile w kostce czterowymiarowej jest długich przekątnych (czyli takich, które nie należą do żadnej ściany trzy-wymiarowej)? Zaznacz je na rysunku takiej kostki.

2. Narysuj na kartce rysunek (dwuwymiarowy rzut) pięciowymiarowej kostki, tak aby krawędzie w każdym z pięciu kierunków były narysowane innym kolorem. Policz wierzchołki, krawędzie, ściany dwuwymiarowe, ściany trzywymiarowe i ściany czterowymiarowe. Sprawdź, czy Twój wynik zgadza się z wynikiem uzyskanym na wykładzie.

3. Zagraj z koleżanką/kolegą w kółko i krzyżyk w czterowymiarowej kostce $3\times3\times3\times3$. Każde kółko i krzyżyk będzie zajmować małą kostkę $1 \times 1 \times 1 \times 1$ (a więc jest 27 takich pól). Wygrywa ten, kto jako pierwszy będzie miał 3 swoje znaki pionowo, poziomo, wgłąb, w czwartym wymiarze lub wzdłuż dowolnej przekątnej. Najłatwiej narysować osobno każdy z kwadratów 3×3 i umówić się jak są ustawione wewnątrz kostki. Następnie spróbuj takiej rozgrywki w kostce $4 \times 4 \times 4 \times 4$. Patrz też zadanie 2 z listy „Łatwych".

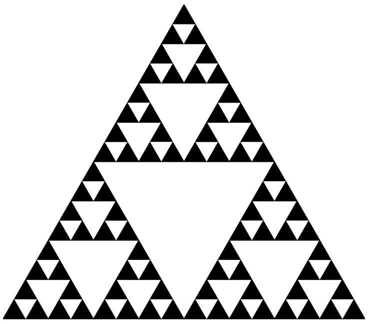
4. Niech będzie dana kostka czterowymiarowa o boku 1cm. Jakie sfery (w przestrzeni czterowymiarowej) związane z tą kostką potrafisz wyróżnić? Ile wynoszą ich promienie?
Wskazówka: Zastanów się nad promieniami następujących sfer: opisanej, czyli przechodzącej przez wierzchołki, stycznej do krawędzi, stycznej do ścian dwuwymiarowych oraz wpisanej, czyli stycznej do ścian trzywymiarowych. Zauważ, że ich średnice pierwszych trzech z nich to przekątne odpowiednio: całej kostki, sześcianu, kwadratu.

5. Figurą dwuwymiarową o najmniejszej możliwej liczbie wierzchołków jest trójkąt. Figurą trzywymiarową o najmniejszej liczbie ścian jest czworościan. Czterowymiarową figurę o najmniejszej możliwej liczbie trzywymiarowych ścian nazywamy czterowymiarowym sympleksem. Spróbuj narysować czterowymiarowy sympleks (jego rzut na dwuwymiarową kartkę). Ile ma wierzchołków? Ile ma krawędzi? Ile ma ścian dwuwymiarowych, a ile ścian trzywymiarowych?
Wskazówka: Taki sympleks ma w podstawie czworościan, a „nad nią" (w sensie czwartego wymiaru) jeszcze jeden wierzchołek.

6. Zenek, który mieszka w n-wymiarowym świecie kupił sobie pomarańczę w kształcie kuli (z jego n-wymiarowego świata). Zauważył, że skórka pomarańczy ma grubość równą 1/8 promienia kuli. Po obraniu zostało mu jednak tylko około 2/10 początkowej n-wymiarowej objętości pomarańczy. W ilu wymiarowym świecie mieszka Zenek?
Wskazówka: $(7/8)^n \simeq 2/10$.

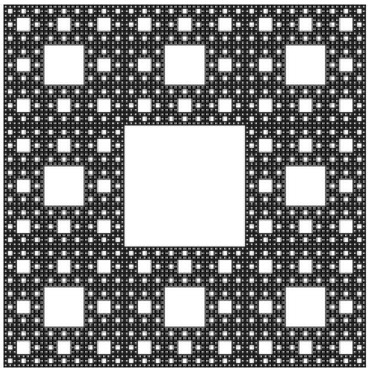
7. Trójkąt Sierpińskiego powstaje następująco. Bierzemy trójkąt równoboczny i łączymy środki jego boków. Usuwamy środkowy z powstałych trójkątów. W każdym z pozostałych trzech trójkątów powtarzamy procedurę (patrz rysunek). Trójkąt Sierpińskiego to figura, która pozostanie po wykonaniu nieskończenie wielu kroków. Znajdź wymiar pokryciowy i wymiar Hausdorffa (samopodobieństwa) trójkąta Sierpińskiego.
Wskazówka: Znajdź takie pokrycie cegiełkami, żeby w każdym punkcie stykały się co najwyżej

dwie. Trójkąt Sierpińskiego składa się z trzech swoich kopii o połowę mniejszych, więc wymiar Hausdorffa to $\log_2 3$*. Użyj komputera (np. WolframAlpha.com) do policzenia logarytmu.*

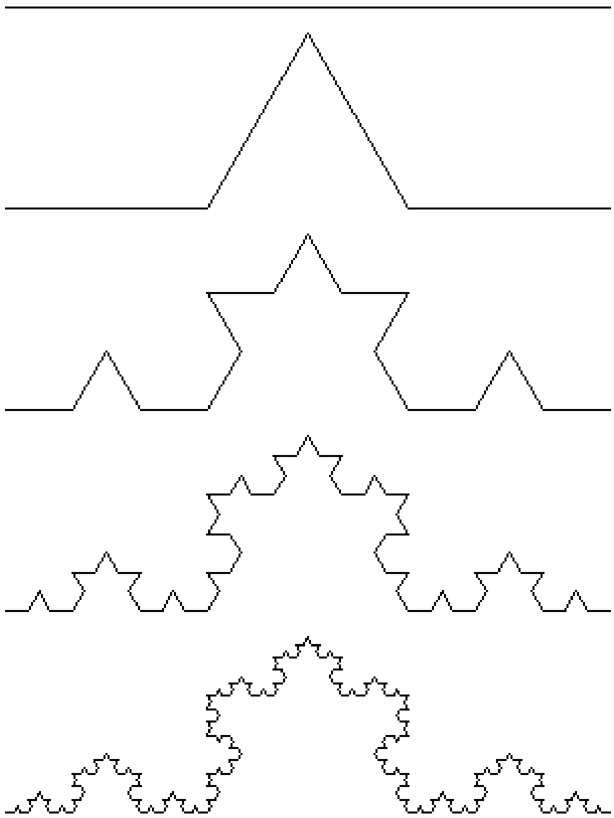


8. Gruby zbiór Cantora powstaje podobnie, jak standardowy zbiór Cantora, z tym że za każdym razem, zamiast usuwać środkową $1/3$ odcinka, usuwam tylko środkową $1/2017$-tą. Znajdź wymiar Hausdorffa grubego zbioru Cantora.
   Wskazówka: Więc gruby zbiór Cantora składa się ze swoich dwóch kopii, z których każda ma długość $1008/2017cm$*, jeśli oryginał miał* $1cm$*. Zatem kopie te są* $2017/1008$ *razy mniejsza od oryginału.*

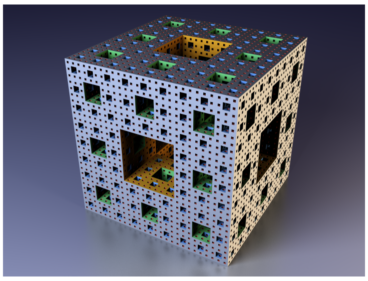
9. Dywan Sierpińskiego powstaje następująco. Bierzemy kwadrat i dzielimy go na 9 mniejszych. Usuwamy środkowy z nich, a w każdym z pozostałych powtarzamy procedurę (patrz rysunek). Dywan Sierpińskiego to figura, która pozostanie po wykonaniu nieskończenie wielu kroków. Znajdź wymiar pokryciowy i wymiar Hausdorffa (samopodobieństwa) dywanu Sierpińskiego.



10. Krzywa Kocha powstaje następująco. Bierzemy odcinek i dzielimy go na 3 równe części. Środkowy odcinek z nich zastępujemy przez dwa boki trójkąta równobocznego, który jest na nim zbudowany i procedurę powtarzamy dla każdego z powstałych w ten sposób czterech odcinków (patrz rysunek). Krzywa Kocha to krzywa, która powstanie po wykonaniu nieskończenie wielu kroków. Znajdź wymiar pokryciowy i wymiar Hausdorffa (samopodobieństwa) krzywej Kocha.



11. Kostka Mengera powstaje następująco. Bierzemy sześcian i dzielimy go na 27 trzy razy mniejszych. Usuwamy środkowe rządki tych sześcianików pionowo, poziomo i wgłąb (patrz rysunek). W pozostałych sześcianikach powtarzamy procedurę. Kostka Mengera to figura, która pozostanie po wykonaniu nieskończenie wielu kroków. Znajdź wymiar Hausdorffa (samopodobieństwa) kostki Mengera.
Wskazówka: W pierwszym kroku usuniemy 7 *sześcianików.*



3 Zadania trudniejsze

1. Uzasadnij spostrzeżenie, które poczyniliśmy na wykładzie, i które mówi, że m-wymiarowych ścian n-wymiarowej kostki jest $a+2b$, gdzie a to liczba ścian $m-1$-wymiarowych w $n-1$-wymiarowej kostce, zaś b to liczba ścian m-wymiarowych w $n-1$-wymiarowej kostce.
Wskazówka: Zanalizuj sposób tworzenia n-wymiarowej kostki, który polega na narysowaniu dwóch $n-1$-wymiarowych kostek przesuniętych względem siebie w n-tym wymiarze i narysowaniu pomiędzy nimi krawędzi.

2. Na podstawie zadań 3 z listy „Łatwych” oraz 4 z listy „Trochę mniej łatwych niż łatwe”, spróbuj uogólnić swoje spostrzeżenia. Po pierwsze, zastanów się jaką ma długość najdłuższa przekątna w kostce n-wymiarowej o boku 1 cm. Po drugie, rozważ jakie sfery związane są z tą kostką. Jaki jest promień sfery stycznej do k-wymiarowych ścian kostki n-wymiarowej o boku 1cm?
   Wskazówka: Zauważ, że średnica tej sfery to przekątna pewnej kostki. Ilu wymiarowej?

3. Narysuj sympleks pięciowymiarowy (patrz zadanie 5 z serii „Trochę mniej łatwych niż łatwe”). Ile ma poszczególnych wierzchołków, krawędzi, ścian (dwu-, trzy- i czterowymiarowych)?
   Wskazówka: Narysuj sympleks czterowymiarowy i dodaj jeszcze jeden wierzchołek przesunięty w piątym wymiarze.

4. Podróżnik po wymiarach Alojzy ma szczególne hobby. Najbardziej lubi podróżować po sympleksach i to w taki sposób, żeby zacząć od wybranego wierzchołka i przejść po kolei jego wszystkie krawędzie, ale tak by każdą z nich zwiedzić tylko jednokrotnie. Oczywiście jest to możliwe w przypadku dwuwymiarowego trójkąta. Czy Alojzy może przejść taką trasę na czworościanie? A na czterowymiarowym sympleksie? Co z pięciowymiarowym sympleksem? Jaką regułę obserwujesz? Spróbuj zastanowić się, dlaczego jest prawdziwa.

5. Jeśli przetniemy na pół w każdym z dwóch wymiarów kwadrat, otrzymamy cztery kwadraty. Jeśli przetniemy sześcian na pół w każdym z trzech jego wymiarów, otrzymamy osiem sześcianików. Usłyszałaś/eś na wykładzie, że jeśli przetniemy kostkę Hilberta (kostkę w przestrzeni nieskończenie wiele wymiarowej) na pół w każdym z wymiarów, to rozpadnie się ona na tak wiele (oczywiście nieskończenie wiele) części, że nie da się tych części zakwaterować w hotelu Hilberta. Udowodnij ten fakt.
   Wskazówka: Każdej części możemy nadać kod w postaci nieskończonego ciągu zer i jedynek, w którym n-ta cyfra koduje, czy ta część jest w lewej, czy prawej połowie względem cięcia w n-tym wymiarze. Dalej prowadzimy dowód nie wprost, załóżmy więc, że udało się zakwaterować te części do hotelu Hilberta, dysponujemy więc listą kodów części po kolei zakwaterowanych do pokojów: zerowego, pierwszego, drugiego, itd. Spróbujmy teraz wygenerować kod, którego na pewno nie ma na tej liście, bowiem jego pierwsza cyfra będzie gwarantować że to nie jest kod z zerowego pokoju, druga – że to nie jest kod z drugiego pokoju, itd. Jak to zrobić? Dlaczego to już sprzeczność?

6. Czterowymiarowa kostka Mengera powstaje następująco. Bierzemy czterowymiarową kostkę i dzielimy ją na 81 trzy razy mniejszych. Usuwamy środkowe rządki tych małych kostek pionowo, poziomo, wgłąb i w czwartym wymiarze (podobnie, jak w przypadku trójwymiarowym, patrz zadanie 11 z listy „Trochę mniej łatwych niż łatwe”). W pozostałych kostkach powtarzamy procedurę. Czterowymiarowa kostka Mengera to figura, która pozostanie po wykonaniu nieskończenie wielu kroków. Znajdź wymiar Hausdorffa (samopodobieństwa) czterowymiarowej kostki Mengera.
   Wskazówka: W każdym usuwanym rządku są 3 kostki, z czego ta środkowa jest wspólna dla każdego rządku. Ile w takim razie ich usuwamy? Ile zostaje?

Zadania inspirowane: [8], pomysłami Michała Korcha.

Literatura dodatkowa

[1] Wiktor Bartol and Witold Sadowski, editors. *O twierdzeniach i hipotezach. Matematyka według Delty.* Wydawnictwa UW, Warszawa, 2016. rozdział 5.

[2] Krzysztof Ciesielski and Zdzisław Pogoda. *Bezmiar matematycznej wyobraźni.* Wiedza Powszechna, Warszawa, 1995. rozdziały: 9 i 10.

[3] Richard Courant, Herbert Robbins, and Ian Stewart. *Co to jest matematyka?* Prószyński i S-ka, Warszawa, 1998. rozdziały: IV.10, V.3 i IX.7.

[4] Tony Crilly. *50 teorii matematyki.* PWN, Warszawa, 2009. rozdziały: 24 i 25.

[5] Marek Kordos. *Wykłady z historii matematyki.* Script, Warszawa, 2005. rozdział 22.

[6] Ian Stewart. *Czy Bóg gra w kości?* PWN, Warszawa, 1996. rozdział 11.

[7] Paweł Strzelecki. *Matematyka współczesna dla myślących laików.* Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawaskiego, Warszawa, 2015. rozdział 3.

[8] Michał Szurek. *O nauczaniu matematyki, tom 8.* Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk, 2006. rozdział: XV.14.