Geometrie Wszechświata.
3. Punkty w nieskończoności
4. Czy Wszechświat jest nieskończony?
materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Michał Korch

16 marzec 2017

Prezentacja multimedialna do wykładu 3.

Inwersja w pigułce

Inwersja to przekształcenie płaszczyzny z punktem w nieskończoności. Inwersja względem okręgu o o środku w punkcie O i promieniu r można sobie wyobrażać jako „symetrię” względem tego okręgu w takim sensie, że przekształca wnętrze tego okręgu na zewnętrze i zewnętrze na wnętrze. W szczególności (przez $\leftrightarrow$ mam na myśli, że odpowiednie rzeczy na siebie przechodzą przy tej inwersji):

- punkt $O \leftrightarrow$ punkt w nieskończoności,
- dowolny punkt A na A', gdzie A' leży na prostej OA oraz:
$$|OA| \cdot |OA'| = r^2,$$
- okrąg jest zatem okręgiem punktów stałych,
- dowolna prosta przechodząca przez O przechodzi na siebie (ale punkty na niej generalnie nie są stałe),
- okrąg przechodzący przez $O \leftrightarrow$ prosta nieprzechodząca przez O,
- okrąg nieprzechodzący przez $O \leftrightarrow$ okrąg nieprzechodzący przez O,
- inwersja zachowuje kąty.

Przekształcenie rzutowe w pigułce

Przekształcenie rzutowe to przekształcenie płaszczyzny z prostą w nieskończoności. Chodzi o to, że wybieramy nową prostą, która będzie w nieskończoności (a dawny horyzont będzie teraz zwyczajną prostą). Poste przechodzą na proste, jeśli jakieś 3 przecinały się w jednym punkcie, to nadal tak jest (w szczególności, jeśli jakieś proste przecinają się na prostej, którą wyrzucamy na horyzont, to po przekształceniu są „równoległe"). Pamiętamy, że dawne proste równoległe przecinają się na prostej, która kiedyś była horyzontem. Jeśli jakieś 3 punkty leżały na jednej prostej, to nadal leżą na jednej prostej. Przekształcenie rzutowe nie zachowuje oczywiście kątów i odległości.

1 Zadania łatwe

1. Jak w hotelu Hilberta (pokoje numerowane od zera) zakwaterować elementy następujących zbiorów?
    - $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
    - $\mathbb{N} \cup \{\pi\}$
    - $\mathbb{N} \setminus \{2014\}$
    - zbiór liczb parzystych.

2. Narysuj okrąg o promieniu 2cm oraz zaznacz dwa punkty: pierwszy – dowolny w odległości 1cm od środka okręgu i drugi – dowolny w odległości 8cm od środka okręgu. Przy pomocy linijki z podziałką znajdź ich obrazy w inwersji względem narysowanego okręgu.
   Wskazówka: $|OA| \cdot |OA'| = r^2$

3. Narysuj okrąg o oraz zaznacz punkt na tym okręgu. Na co przejdzie ten okrąg w inwersji względem okręgu o środku w narysowanym punkcie (i dowolnym promieniu)?

4. Narysuj dwie proste równoległe do siebie oraz okrąg styczny do obu tych prostych. Naszkicuj obraz tego rysunku w inwersji względem narysowanego okręgu.

5. Naszkicuje dwie proste przecinające się w punkcie A oraz dowolny okrąg wpisany w kąt tworzony przez te proste. Naszkicuj obraz tego rysunku w inwersji względem narysowanego okręgu.

6. Niech będzie dany okrąg o oraz okrąg s styczny do o od wewnątrz i przechodzący przez środek okręgu o. Naszkicuj obraz tego rysunku w inwersji względem okręgu o oraz obraz tego rysunku w inwersji względem okręgu s.

7. Niech będą dane dwie proste równoległe k i l oraz prosta m przecinająca je. Naszkicuj ten rysunek po przekształceniu rzutowym w wyniku którego prosta m będzie w nieskończoności.
   Wskazówka: Zacznij od ustalenia dowolnej prostej, która będzie dawnym horyzontem. Po przekształceniu k i l przecinają się na niej.

8. Niech będzie dany trójkąt ABC. Naszkicuj jego obraz po przekształceniu rzutowym, w wyniku którego prosta równoległa do BC, a przechodząca przez punkt A znajdzie się w nieskończoności.
   Wskazówka: Proste AC i AB staną się „równoległe", bo przecinają się w jednym puncie w nieskończoności.

2 Zadania trochę mniej łatwe niż łatwe

1. Jak w hotelu Hilberta (pokoje numerowane od zera) zakwaterować elementy następujących zbiorów?
   - $\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$.
   - $\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.
   - liczby całkowite ($\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots\}$).

2. Niech będzie dany trójkąt prostokątny ABC o przeciwprostokątnej AB. Naszkicuj jego obraz w inwersji względem okręgu na nim opisanego.
   Wskazówka: Ponieważ kąt przy C jest prosty, AB jest średnicą tego okręgu.

3. Narysuj obraz kwadratu w inwersji względem okręgu na nim opisanego.
   Wskazówka: Pamiętaj, że inwersja zachowuje kąty.

4. Narysuj obraz kwadratu w inwersji względem okręgu w niego wpisanego.

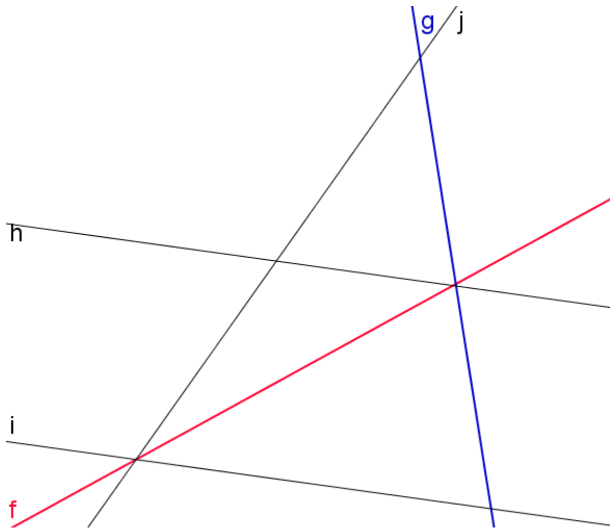
5. Okrąg o_1 jest styczny zewnętrznie do rozłącznych okręgów o_2 i o_4. Podobnie rozłączny z o_1, okrąg o_3 jest styczny zewnętrznie do o_2 i o_4. Wykaż, że te cztery punkty styczności leżą na jednym okręgu.
   Wskazówka: Rozważ inwersję względem jednego z punktów styczności (o dowolnym promieniu) i wykaż, że pozostałe muszą leżeć wtedy na jednej prostej.

6. Niech będzie dany okrąg o o środku w punkcie O oraz punkt A różny od O oraz nie leżący na o. Przy pomocy cyrkla i linijki bez podziałki skonstruuj obraz punktu A w inwersji względem okręgu o.
   Wskazówka: Wykorzystaj zadanie 3 z „Łatwych” z pierwszych ćwiczeń.

7. Jak będzie wyglądać równoległobok po przekształceniu rzutowym, w wyniku którego prosta zawierająca jeden z jego boków znajdzie się w nieskończoności?
   Wskazówka: Zaznacz najpierw dowolną prostą, która jest dawnym horyzontem. Jakie proste przecinają się na niej w jednym punkcie?

8. Jak będzie wyglądać równoległobok po przekształceniu rzutowym, w wyniku którego prosta zawierająca jego przekątną znajdzie się w nieskończoności?

9. Naszkicuj poniższy obrazek po przekształceniu rzutowym w wyniku którego prosta g zostaje przeniesiona do nieskończoności.



10. Naszkicuj powyższy obrazek po przekształceniu rzutowym w wyniku którego prosta f zostaje przeniesiona do nieskończoności.

11. Niech będą dane dwie nierównoległe proste przecinające się poza Twoją kartką oraz punkt pomiędzy nimi. Korzystając jedynie z linijki bez podziałki, wyznacz prostą, która przechodzi przez dany punkt i przecina się z danymi prostymi w jednym punkcie.
Wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Desarguesa (patrz zadanie 5 z trudniejszych). Niech dwie dane proste to będą proste AA', CC', zaś dany punkt to niech będzie punkt B. Narysuj resztę rysunki po kolei tak, żeby punkty przecięć AB z $A'B'$, BC z $B'C'$, AC z $A'C'$ leżały na jednej prostej. Wtedy BB' to szukana prosta.

3 Zadania trudniejsze

1. Jak w hotelu Hilberta zakwaterować liczby wymierne (liczby postaci p/q, gdzie p, q są całkowite oraz $q \neq 0$)?
Wskazówka: Rozpatrz nieskończoną tabelką liczb wymiernych, w których w wierszach zmienia się p, a w kolumnach q. Jaką trasę po tej tabelce może przejść recepcjonista, żeby zakwaterować wszystkie liczby?

2. W czworokącie $ABCD$, okręgi wpisane w trójkąty ABC i ACD są styczne ze sobą. Wykaż, że punkty styczności tych okręgów z bokami czworokąta leżą na jednym okręgu.
Wskazówka: Rozważ inwersję względem punktów styczności tych okręgów (o dowolnym promieniu).

3. Rozwiąż następujące słynne zadanie Apoloniusza: skonstruuj okrąg styczny do trzech danych okręgów, z których dwa są styczne zewnętrznie, a trzeci z nimi rozłączny.
Wskazówka: Wykonaj zadanie po przekształceniu wszystkiego przez inwersję względem tego punktu styczności. Powróć do poprzedniej sytuacji korzystając z zadania 6 z serii „Zadania trochę mniej łatwe niż łatwe”.

4. Rozwiąż następujące słynne zadanie Apoloniusza w ogólnym przypadku: skonstruuj okrąg styczny do trzech danych rozłącznych okręgów okręgów.
Wskazówka: Powiększ dwa z nich tak, żeby były styczne.

5. Rozważmy geometrię rzutową. Udowodnij twierdzenie odwrotne do twierdzenia Desarguesa: niech będą dane trójkąt ABC oraz $A'B'C'$ oraz niech P, Q, R będą punktami przecięcia odpowiednio AB z $A'B'$, BC z $B'C'$ oraz AC z $A'C'$. Załóżmy, że P, Q, R leżą na jednej prostej. Udowodnij, że proste AA', BB' oraz CC' przecinają się w jednym punkcie.
   Wskazówka: Postępuj podobnie, jak w dowodzie tw. Desarguesa przedstawionym na wykładzie.

Zadania inspirowane: listą zadań „W krzywym zwierciadle" opublikowaną w „Delcie" autorstwa J. Jaszuńskiej, pomysłami Michała Korcha.

Literatura dodatkowa

[1] Richard Courant, Herbert Robbins, and Ian Stewart. *Co to jest matematyka?* Prószyński i S-ka, Warszawa, 1998. rozdziały: II.4, III.4, III.6, IV.4 i IV.5.

[2] Tony Crilly. *50 teorii matematyki.* PWN, Warszawa, 2009. rozdziały: 7 i 31.

[3] Timothy Ferris, editor. *Skarby astronomii.* Amber, Warszawa, 1991. rozdziały: 8 i 14.

[4] David Filkin. *Wszechświat Stephena Hawkinga.* Rebis, Poznań, 1998. rozdziały: 2, 3, 4, 5 i 6.

[5] John Gribbin and Mary Gribbin. *Czas i przestrzeń.* Arkady, Warszawa, 1995. rozdziały: 22 i 28.

[6] Stephen Hawking. *Krótka historia czasu.* Alfa, Warszawa, 1990. rozdziały: 1, 3 i 8.

[7] Stephen Hawking. *Wszechświat w skorupce orzecha.* Zysk i S-ka, Poznań, 2002. rozdział: 3.

[8] Stephen Hawking. *Ilustrowana teoria wszystkiego.* Zysk i S-ka, Poznań, 2004. rozdziały: 1 i 2.

[9] Marek Kordos. *Wykłady z historii matematyki.* Script, Warszawa, 2005. rozdziały: 8, 11, 12, 13 i 18.

[10] Serge Lang. *Młodzi i matematyka.* Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk, 1995. rozdział 9.

[11] Roger Penrose. *Nowy umysł cesarza.* PWN, Warszawa, 2000. rozdział VII.6.

[12] Michał Szurek. *Opowieści geometryczne.* WSiP, Warszawa, 1995. rozdziały: 6 i 29.

[13] Steven Weinberg. *Pierwsze trzy minuty.* Prószyński i S-ka, Warszawa, 1998.