

Wszechświat liczb

3. Supergromada rzeczywiŝta

Matematyka w muzyce

skrypt warsztatowy

spisał: Michał Korch

13 maja 2017

Celem tych warsztatów będie zbadanie związków pomiędzy matematyką a muzyką. Jak się okaże cała struktura dźwięków, to jak do siebie pasują i dlaczego jest związane z wielokrotnościami i proporcjami. A co za tym idzie z potęgami i operacją matematyczną, którą przy okazji poznacie, czyli logarytmem. Do dzieła!

Macie przed sobą kilka instrumentów.

kamerton – jest muzycznym wzornikiem. Zawsze wydaje ten sam dźwięk i się nie rozstraja.

fletnia Pana – jeden z najstarszych instrumentów znanych ludzkości. Na tyle, że właściwie trudno powiedzieć skąd pochodzi. Na różnych odmianach fletni pana grali już starożytni Grecy (nazwa instrumentu z resztą pochodzi z mitologii!), ale i niektóre plemiona indiańskie. Fletnia składa się z piszczałek. Odpowiednie dmuchnięcie (trochę trikowe jest jak to trzeba zrobić!) w piszczałkę wydobywa z niej dźwięk. Każda kolejna piszczałka daje inny dźwięk.

kalimba – jest to niewielki pudło rezonansowe (które powoduje wzmocnienie dźwięku) z przytwierdzonymi metalowymi blaszkami. Szarpnięcie każdej blaszki wydobywa inny dźwięk. Gra na tym instrumencie jest relatywnie prosta, a dźwięki są wręcz hipnotyzujące. Pochodzi z południowo-centralnej Afryki.

ukulele – przypomina małą gitarę, ale ma 4 struny, a nie 6 – tak jak gitara. Ma więc też pudło rezonansowe i struny. Pochodzi z Hawajów – ukulele wymyślili tam portugalscy imigranci na bazie podobnego portugalskiego instrumentu. Nazwa tłumaczy się na „skacząca pchła”.

Będzie Wam też potrzebny komputer. Na komputerze zainstalowany jest program Soundcard Scope, który funkcjonuje jak oscyloskop. Oscyloskop to przyrząd służący do obrazowania fal dźwiękowych i ich analizy – rozbicia na poszczególne częstotliwości.

1 Dźwięk A

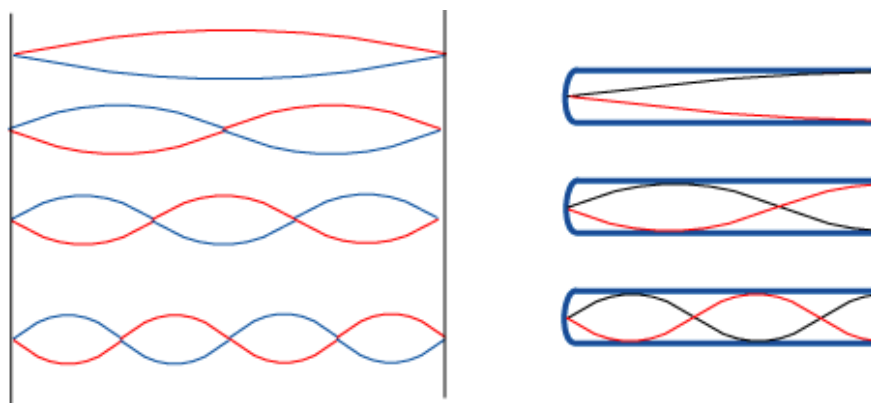
Każdy dźwięk jest po prostu drganiem powietrza, które nasze uszy i mózg odbierają jako dźwięk, zwaną falą dźwiękową. Taka fala ma swoją częstotliwość, która mówi ile razy na sekundę to powietrze drga. Częstotliwość mierzy się w hercach, $1Hz = 1/s$, czyli częstotliwość $440Hz$ to

dźwięk, który polega na tym, że powietrze drga 440 razy na sekundę. Im większa częstotliwość, tym większy dźwięk.

1. Weźcie kamerton. Ma on to do siebie, że wydaje jeden konkretny dźwięk. Trzymając go za podstawę trzeba uderzyć w coś twardego widełkami. Kamerton nie ma pudła renesansowego, więc dźwięk jest bardzo cichy – aby go usłyszeć przybliżyć kamerton do ucha lub dotknij swojej skroni kulką u podstawy kamertonu (wtedy dźwięk dotrze do Twojego ucha jako fala dźwiękowa w kościach Twojej czaszki :)). Możesz też przytknąć kulkę do pudła rezonansowego innego instrumentu – ukulele albo kalimby.
2. Spróbujcie teraz zobaczyć ten dźwięk na oscyloskopie. Trzeba uderzyć w kamerton, a następnie delikatnie (aby nie wygenerować stuknięcia) dotknąć kulką do jakiegoś pudła rezonansowego lub samego laptopa.
3. Przełączcie zakładkę na Frequency. To narzędzie pokazuje poszczególne częstotliwości, z których składa się fala dźwiękowa (oczywiście mogą docierać do nas różne częstotliwości jednocześnie). Spróbujcie zarejestrować częstotliwość kamertonu (żeby zatrzymać piki wykresu trzeba skorzystać z opcji Peak hold, proponuję też przybliżyć wykres w okolicach 500Hz (zoom)).
4. No właśnie dźwięk 440Hz to dźwięk kamertonu (jak obejrzycie go dokładnie zobaczycie, że jest to nawet na nim wygrawerowane). W muzyce nazywa się to dźwiękiem A (lub bardziej precyzyjnie A_4).
5. Przy pomocy pomiaru częstotliwości, znajdźcie ten sam dźwięk na pozostałych instrumentach. Jeśli, na którymś instrumencie okaże się to trudne, poszukajcie dwukrotności tego dźwięku, czyli 880Hz .

2 Barwa dźwięku i mody

1. Być może zauważyliście, że o ile wzbudzając dźwięk na kamertonie pojawia się jeden pik na wykresie, o tyle na innych instrumentach pojawia się ich więcej. Zagrajcie znaleziony dźwięk A na ukulele i wypiszcie jakie jeszcze częstotliwości się pojawiają. Co te częstotliwości mają ze sobą wspólnego? Te pozostałe częstotliwości nazywane są czasem modami.
2. A jak się dzieje na innych instrumentach? Obserwujecie takie same mody, jak na ukulele, czy tylko niektóre z nich? Okazuje się, że to właśnie mody składają się na barwę dźwięku. Dzięki temu inaczej brzmi dźwięk A na ukulele, a inaczej na fletni Pana. Zauważ, że najpełniejszy obraz modów otrzymujemy właśnie na instrumentach strunowych. Natomiast na instrumentach, w które się dmucha pojawia się tylko co drugi mod. Zastanów się chwilę dlaczego tak się dzieje – podpowiedzią może być poniższy rysunek.



3. Dlatego właśnie dźwięki będące swoimi wielokrotnościami tak bardzo do siebie pasują. Odległość pomiędzy dźwiękiem i dźwiękiem dwa razy wyższym (o dwa razy większej częstotliwości) nazywamy oktawą, a ten dźwięk oznaczamy tą samą literą. Czyli skoro $440Hz$ to A , to również $880Hz$ to A . A skoro $880Hz$ to A , to również $1760Hz$ to A . Inaczej mówiąc dźwięki A to dźwięki o częstotliwościach:

$$2^n \cdot 440Hz.$$

3 Inne dźwięki

1. Ale do dźwięku $A = 440Hz$ pasuje też dźwięk o 3 razy większej częstotliwości, czyli dźwięk $1320Hz$. To już nie jest dźwięk A – nazywamy go E^1 . Wobec tego E to również dwa razy mniej, czyli $660Hz$. Znajdźcie jakieś E na którymś instrumencie.
2. Zwiększając częstotliwość A 4 razy, mamy oczywiście znów A , ale zwiększając ją 5 razy, znów dostajemy nowy dźwięk. Akurat będzie to dźwięk Cis^2 , który znajdziemy też niżej $440Hz \cdot 5/4 = 550Hz$.
3. Jeśli będziemy brać wielokrotności 2-ki i 3-ki możemy w sumie już dojść do 12 podstawowych dźwięków. I właśnie z tych 12 dźwięków składa się cała standardowa muzyka. Można je precyzyjnie ułożyć w rosnącej kolejności (i zgodnie z angielskim nazewnictwem) będą to kolejno dźwięki:

$$A \ Ais \ B \ C \ Cis \ D \ Dis \ E \ F \ Fis \ G \ Gis \ A$$

Inaczej mówiąc cała oktawa dzieli się na 12 interwałów, które muzycy nazywają półtonami. Zagraj kolejne dźwięki na kalimbie lub fletni Pana. Niektóre z dwóch kolejnych są odległe od siebie o półtonu, a niektóre o cały ton (dwa półtony). Spróbuj wykryć z wykresu, które są które i wypisać ich częstotliwości.

4 Logarytm

1. Zauważ zatem, że, gdybyśmy chcieli sprawdzić ile herców przypada na jedną oktawę, nie moglibyśmy tego zrobić. Kolejne oktawy (niżej odległości pomiędzy dźwiękami A) mają

¹Z pewną dokładnością.

²Z pewną dokładnością.

2 razy więcej herców:

$$440 - 220 = 220 = 2^0 \cdot 220$$

$$880 - 440 = 440 = 2^1 \cdot 220$$

$$1760 - 880 = 880 = 2^2 \cdot 220$$

$$3520 - 1760 = 1760 = 2^3 \cdot 220$$

...

Gdybyśmy chcieli więc sprawdzić o ile oktav od siebie odległe są dźwięki o częstotliwości: 7040Hz i 56320Hz zupełnie nie jest to jasne. Potrzebujemy nowej operacji matematycznej zwanej logarytmem. Logarytm to odwrotność potęgowania, w takim sensie, że

$$\log_2 x$$

to liczba, do której trzeba podnieść 2 aby otrzymać x . W takim razie, np:

$$\log_2 8 = 3,$$

bo $2^3 = 8$. W ramach zapoznawania się z logarytmami oblicz:

$$\log_2 64,$$

$$\log_2 2,$$

$$\log_2 1024.$$

Uwaga $\log_2$ często oznacza się jako $\lg$ – i pod taką postacią występuje często na przyciskach kalkulatorów.

2. Okazuje się zatem, że jak policzymy logarytmy z częstotliwości to już każda oktawa to taka sama odległość. Dokładnie 1. Rzeczywiście, sprawdź na kalkulatorze:

$$\lg 440 - \lg 220$$

$$\lg 880 - \lg 440$$

$$\lg 1760 - \lg 880$$

3. A ile wynosi odległość logarytmiczna pomiędzy dwoma dźwiękami w odległości półtonu? Sprawdź na przykładzie półtonów znalezionych w poprzedniej części.
4. Zauważ, że wykres częstotliwości w programie Sound Oscilloscope można przełączyć na skalę logarytmiczną. Sprawdź, że wtedy dźwięki w odległości kolejnych oktav pojawiają się na wykresie w tych samych odstępach.