

Wszechświat liczb

3. Supergromada rzeczywiŝta

Mechanicznie międy kołem a prostą

skrypt warsztatowy

spisał: Michał Korch

13 maja 2017

Jednym z najsłynniejszych problemów starożytnych Greków była kwadratura koła. Zadanie to polega na tym, że mając dane koło trzeba skonstruować kwadrat o polu równym polu tego koła. Próbowano rozwiązać to zadanie przez wieki proponując kolejne rozwiązania, które jednak potem okazywały się tylko częściowo dokładne.

Ostatecznie pełną odpowiedź poznaliśmy dopiero w XIX wieku. A odpowiedź ta brzmi: nie da się. Okazuje się, że przy pomocy linijki cyrkla można skonstruować tylko niewymierności kwadratowe o współczynnikach całkowitych, czyli na przykład:

$$\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{11}}, \text{ czy } \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

Tymczasem koło o promieniu r jak wiadomo ma pole πr^2 , czyli dla $r = 1$, mamy pole π , a kwadrat pole a^2 , więc, żeby miał pole równe polu danego koła o $r = 1$ musi mieć bok $a = \sqrt{\pi}$. No a π jest liczbą przestępną, jak sobie powiedzieliśmy na wykładzie – nie da się więc tego skonstruować.

Ale problem zamiany koła w prostokąt, czy okręgu w prostą, jest jak się okazuje zupełnie praktycznym problemem. Trzeba umieć to zrobić. Z pomocą przychodzą nam specjalne narzędzia, które mogą temu służyć – i tworzeniu takich narzędzi będą poświęcone te warsztaty.

1 Kwadratura koła metodą Leonarda da Vinci

Leonardo da Vinci zaproponował następujący „mechaniczny” sposób na kwadraturę (a tak naprawdę na „prostokątyzację”) koła. Mając dane koło (o promieniu r cm), które chcesz zamienić na prostokąt o takim samym polu, zbuduj walec o podstawie będącej tym danym kołem i wysokości 1cm . Poczernij go sadzą i tocz po papierze. Wałec zostawi ślad w postaci szukanego prostokąta.

Dlaczego to rozwiązanie działa? Spróbujcie przetestować to rozwiązanie w praktyce (w tym celu wymyŝcie też alternatywną metodę do czernienia wałca sadzą).

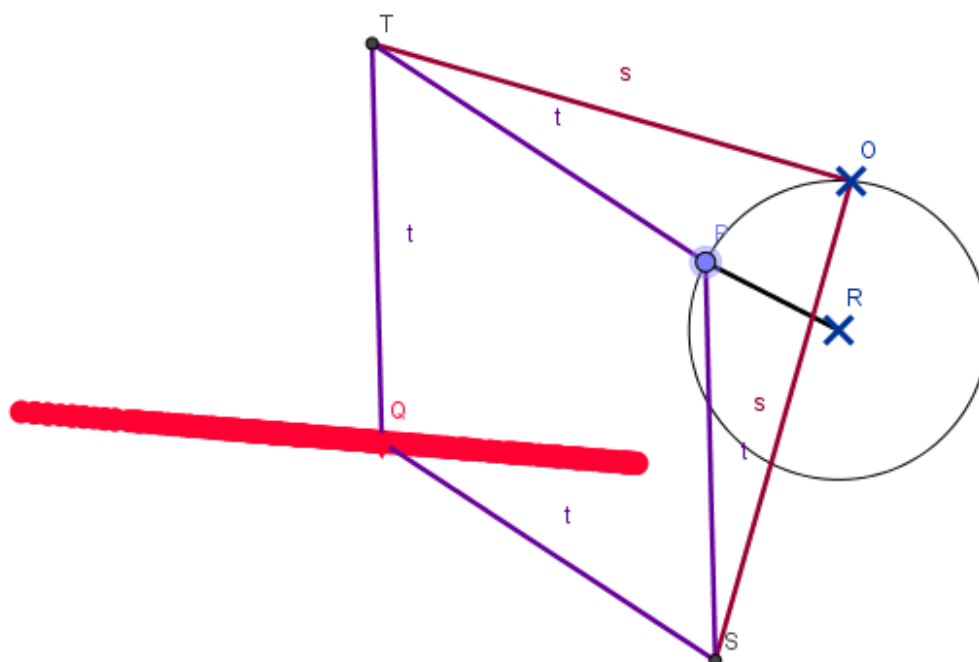
2 Silnik parowy

Kolejna potrzeba przerobienia okręgu na prostą przyniósł silnik parowy. O ile tłok poruszał się po odcinku, to przecież miał powodować ruch kół. Przytwierdźcie, np. klejem słomkę do

sztywnej powierzchni – to będzie Wasz tłok. Trochę dalej przytwierdźcie pinezką wycięte ze sztywnego papieru koło – tak, żeby mogło się obracać. Spróbujcie przy pomocy patyczków i gumek recepturek skonstruować urządzenie, które będzie tak działać, że ruch patyczka w tłoku będzie powodować obracanie się koła. Jeśli potrzebujecie podpowiedzi, znajdziecie ją w kopercie.

3 Inwensor Peaucelliera

Jak widzisz urządzenie z poprzedniego punktu nie jest idealne – przez dużą część ruchu koło jest ciągnięte prawie prostopadłe do właściwego kierunku. Zaletą jest to, że jest proste. Inny bardziej skomplikowany pomysł na urządzenie zmieniające okręgi w odcinki (lub odcinki w okręgi) miał Peaucellier – wymyślił inwensor, patrz rysunek.



Składa się on z czterech prętów równej długości (fioletowe) i dwóch prętów innej długości (bordowe) i jeszcze jednego pręta (czarny). Punkty R i O są umocowane na sztywno (tak że odległość R i O jest równa długości czarnego pręta), a pozostałe punkty to swobodne przeguby. Inwensor działa tak, że jeśli punkt P będziemy obracać wokół punktu R , to punkt Q będzie zakreślać prostą (zaznaczoną na różowo na rysunku).

Z dostępnych materiałów spróbujcie zbudować taki inwensor i go przetestować.