

Wszechświat liczb

3. Supergromada rzeczywiŝta

Logarytm w finansach

skrypt warsztatowy

spisał: Michał Korch

13 maja 2017

Na wykładzie w przykłaŝdzie finansowym poznaliŝcie liczbę e . Te warsztaty sę kontynuacją finansowych spraw zwięzanych z tą liczbą oraz z operacją matematyczną nazywaną logarytmem, która znajduje szerokie zastosowanie w analizie danych ekonomicznych, ale i przewidywań finansowych.

1 Logarytmy

Zacznijmy od tego, co to jest logarytm. Jest to operacja odwrotna do potęgowania. Logarytm o podstawie a z b to potęga do której trzeba podnieŝć a , ŝeby otrzymać liczbę b . Czyli, jeŝli:

$$a^p = b$$

, to

$$\log_a b = p.$$

Na przykłaŝd:

- $\log_3 81 = 4$, bo $3^4 = 81$,
- $\log_5 25 = 2$, bo $5^2 = 25$,
- $\log_{10} 1000 = 3$, bo $10^3 = 1000$.

Dla uproszczenia zapisu, jeŝli podstawa $a = 2$, to piszemy po prostu $\lg c$, a jeŝli $a = 10$, to $\log c$. Wyliczcie (zgadnijcie):

1. $\log_2 4$,
2. $\lg 1024$,
3. $\log_3 81$,
4. $\log 1000000000$,
5. $\log_\pi \pi$.

Udowodnijcie, ŝe $a^{\log_a c} = c$, dla dowolnych liczb a i b .

Liczba e w finansach

Na wykładzie sprawdziliśmy, że jeśli mamy na koncie złotówkę i naliczają się do niej odsetki w wysokości 100% w skali roku, to na koniec roku będziemy mieli:

- $(1 + 1/1) = 2$, jeśli odsetki naliczają się co roku,
- $(1 + 1/2)^2 = 2,25$, jeśli odsetki naliczają się co pół roku,
- $(1 + 1/4)^4 \approx 2,44$, jeśli odsetki naliczają się co kwartał,
- $(1 + 1/12)^{12} \approx 2,61$, jeśli odsetki naliczają się co miesiąc,
- $(1 + 1/52)^{52} \approx 2,69$, jeśli odsetki naliczają się co tydzień,
- $(1 + 1/365)^{365} \approx 2,71$, jeśli odsetki naliczają się codziennie.

Okazało się w szczególności, że ta liczba jest coraz bliższa liczbie $e \approx 2,718281828459$. Inaczej mówiąc tyle byśmy mieli, jeśli odsetki naliczałyby się w trybie ciągłym.

Sprawdź ile byśmy mieli na koncie, gdyby jednak odsetki wynosiły 50% w skali całego roku i były naliczane w trybie ciągłym (wylicz jakieś przybliżenie tej liczby, np. dla odsetek naliczanych codziennie). Jak ta liczba ma się do e ? A co by było, gdyby te odsetki wręcz przeciwnie były dwa razy wyższe i wynosiły 200%?

Wskazówka: Może to jakaś potęga liczby e ? A może jakiś pierwiastek?

Czyli widać, że te odsetki objawiają się w potęgach liczby e (matematycy z reguły piszą, że $\sqrt{e} = e^{1/2}$ i dzięki temu umieją liczyć potęgi, w których wykładnik jest niecałkowity).

Możemy też zrobić odwrotnie – dowiedzieć się jakie były odsetki, znając końcowy wynik finansowy (i zakładając, że były naliczane w trybie ciągłym). Czyli jeśli na końcu było x złotych to odsetki wynosiły p , gdzie $x = e^p$, czyli inaczej mówiąc $p = \log_e x$. Taki logarytm (o podstawie e) nazywa się logarytmem naturalnym i z reguły oznacza po prostu $\ln x$. Załóżmy więc, że na koniec roku na koncie mamy 1,50 PLN. Jakie były odsetki, jeśli były naliczane w trybie ciągłym, a na początku roku na koncie mieliśmy złotówkę? (Użyj kalkulatora!)

2 Analizowanie giełdy logarytmem

Wiele procesów finansowych ma podobny charakter do tego ciągłego naliczania odsetek. Wzrost gospodarczy, cena akcji, i wiele wiele innych. Dlatego logarytm bardzo przydaje się do analizowania ich wartości.

Załączyłem wykres wartości amerykańskiej giełdy od początku jej notowań. Jasne jest, że niewiele widać na tym wykresie poza tym, że giełda rośnie coraz szybciej. Najświeższe wahania związane z kryzysem finansowym wydają się potężne. A żeby dokładnie zanalizować, co się dzieje, trzeba narysować wykres logarytmu tych wartości – inaczej mówiąc taki wykres, na którym poziome kolorowe linie są ułożone w równej odległości. Weźcie papier milimetrowy i naszkicujcie taki wykres z grubsza. Jakie wydarzenia z historii ostatniego stulecia widać teraz na tym wykresie?

3 Na koniec: zagadka

Tradycyjnie, do zadań dołączam zagadkę. Macie 12 monet, które wyglądają jednakowo. Jedna moneta jest jednak fałszywa – jest nieznacznie lżejsza lub nieznacznie cięższa od pozostałych.

Masz do dyspozycji wagę szalkową – i tylko wagę szalkową. Możesz też oznaczać monety farbą, co nie zmienia ich wagi w żaden istotny dla zadania sposób. Jak znaleźć fałszywą monetę, korzystając z wagi tylko trzy razy?