

Wszechświat liczb

1. Planeta naturalna

Biologia: ciąg Fibonacciego

skrypt warsztatowy

spisał: Michał Korch

8 kwiecień 2017

1 Spirala Fibonacciego

1. Weźcie kartkę w kratkę i pogrubcie boki jednej z krutek (gdzieś po środku). To Wasz pierwszy kwadrat 1×1 . Zaznaczcie jego lewy dolny wierzchołek. Dorysujcie do tego kwadratu kolejny kwadrat 1×1 przylegający do niego od góry. Następnie narysujcie kwadrat 2×2 przylegający do dotychczasowych kwadratów z lewej strony. Teraz pora na kwadrat 3×3 od dołu. Następnie kwadrat 5×5 z prawej strony. Kontynuujcie w ten sposób rysowanie coraz większych (tak, że bok nowego kwadratu to bok dotychczasowego prostokąta) kwadratów z kolejnych stron dotychczasowego rysunku z kolejnych stron zgodnie ze wskazówkami zegara.
2. Następnie poczynając od zaznaczonego wierzchołka narysujcie łamaną składającą się z przekątnych kolejno narysowanych kwadratów. Naszkicujcie możliwie gładką spiralę przechodzącą przez kolejne wierzchołki łamanej. Przed Tobą spirala Fibonacciego.
3. Przyjrzyjcie się elementom roślin oraz zdjęciom, które otrzymaliście i spróbujcie znaleźć na nich możliwie dużo spiral Fibonacciego.
4. Rysując kilka spiral Fibonacciego można wiernie narysować szyszkę, tak jak ona wygląda, gdy patrzy się na nią od strony ogonka. W tym celu weźcie pustą kartkę i zaznaczcie na niej punkt. Z tego punktu „na oko” naszkicujcie 5 współśrodkowych spiral Fibonacciego zawijających się zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara oraz 8 takich spiral zakręcających przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, a zaczynających się w tym samym punkcie. Spirale zakręcające przeciwnie do ruchu wskazówek zegara oczywiście przetną te idące zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Pogrubcie kreski na rysunku tak, żeby obrysować wszystkie zamknięte obszary. Czy widzicie już na swoim rysunku szyszkę? Zacieniujcie róg każdej łuski od strony bliższej środka, aby dodatkowo podkreślić trójwymiarowy efekt na Waszym rysunku.

2 Ciąg Fibonacciego

1. Jak pewnie zauważyliście, boki kolejnych kwadratów na Waszym rysunku to kolejne liczby z ciągu Fibonacciego. Ciąg ten zaczyna się dwoma jedynkami, a kolejny wyraz jest zawsze

sumą dwóch poprzednich. Czyli kolejne wyrazy to:

$$1, 1, 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 5 = 3 + 2, 8 = 5 + 3, \dots$$

Obliczcie jeszcze 9 kolejnych wyrazów tego ciągu.

- Przyjrzyjcie się ponownie roślinom i zdjęciom, które otrzymaliście. Na większości z nich łatwo odnaleźć kolejne liczby Fibonacciego na wiele sposobów. Licząc możecie wspomóc się zaznaczając policzone elementy markerem lub używając kolorowej taśmy. Jedynie nie rysujcie proszę po szyszkach – chciałbym je odzyskać w nienaruszonym stanie!

3 Złota proporcja

- Policzcie kolejne ilorazy znalezionych liczb z ciągu Fibonacciego, czyli (używając kalkulatora) podzielcie drugą liczbę przez pierwszą, trzecią przez drugą, czwartą przez trzecią i tak dalej. Co obserwujecie?
- Ten ciąg ilorazów jest coraz bliższy do tak zwanej złotej proporcji, która wynosi:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Policzcie na kalkulatorze powyższą liczbę i sprawdźcie, że rzeczywiście wyrazy ciągu ilorazów są do niej coraz bliższe.

- Liczba φ jest nazywana czasem „najprostszą niewymierną liczbą” lub „najbardziej niewymierną liczbą”. Liczby niewymierne to takie liczby, których nie da się zapisać w postaci p/q , gdzie obie liczby p, q są całkowite, przy czym $q \neq 0$. Inne przykłady liczb niewymiernych, poza φ , to chociażby π , czy też $\sqrt{2}$. Liczbami niewymiernymi jeszcze się zajmiemy w przyszłości, ale teraz spróbujmy udowodnić, że φ jest rzeczywiście niewymierna. Spróbujcie zastanowić się jak tego dokonać, a w razie czego niżej przygotowałem kilka wskazówek.
Wskazówka: Załóżmy przeciwnie, że są takie liczby całkowite p, q , że $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{p}{q}$. Przekształćcie to równanie tak, żeby nie mieć w nim pierwiastka.
Wskazówka: Czyli w takim razie 5 jest ilorazem kwadratów dwóch liczb całkowitych: $a^2 = (2p-q)^2$ oraz q^2 . Rozważ teraz podzielność przez potęgi piątki licznika i mianownika. Skoro to kwadraty, to każdy, jeśli się dzieli przez 5, to musi się dzielić przez 25, czyli generalnie i licznik i mianownik dzieli się na pewno przez parzystą potęgę dwójki. Zatem ich iloraz? A tym czasem lewa strona...
- Wiemy już, że φ jest liczbą niewymierną. Dlaczego jest więc „najbardziej niewymierną”? Otóż każdą liczbę można rozłożyć w ułamek łańcuchowy. Co to ułamek łańcuchowy? Przyjrzyjmy się na przykładzie. Np.:

$$\frac{43}{5} = 8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}},$$

co łatwo sprawdzić, sprowadzając kolejne dodawania do wspólnego mianownika. Tymczasem liczby niewymierne rozpisują się w nieskończone ułamki łańcuchowe, czyli:

$$\square + \frac{1}{\square + \frac{1}{\square + \frac{1}{\square + \frac{1}{\dots}}}}.$$

Co trzeba wstawić za $\square$, żeby dostać liczbę φ ? Najprostsza możliwa liczba jest najlepsza! Właśnie dlatego φ jest „najprostszą niewymierną liczbą” lub „najbardziej niewymierną liczbą”. Sprawdź kolejne przybliżenia obcinając ułamek łańcuchowy w którymś miejscu.
Wskazówka: 1.

4 Złota proporcja w biologii

1. Roślinom zależy na tym, żeby kolejne liście wyrastające z łodyżki nie przesłaniały sobie wzajemnie słońca. Jak spojrzymy na kąty pomiędzy kolejnymi liśćmi, to nie opłaca się mieć ich na przykład co 180° , bo wtedy co drugi będzie się przesłaniać. W ogóle nie opłaca się mieć ich co $360^\circ/n$ stopni. Z pomocą przychodzą liczby niewymierne! Jeśli będziemy rozmieszczać liście do $360^\circ/a$ stopni, gdzie a jest liczbą niewymierną, to nigdy żaden nie pokryje się dokładnie z poprzednim. No a skoro najlepszą liczbą niewymierną jest φ , to policzmy ile to jest $\frac{360^\circ}{\varphi}$. Wychodzi coś większego od 180° , i wygodniej będzie nam korzystać z dopełnienia tego kąta, czyli $\alpha = 360^\circ - \frac{360^\circ}{\varphi}$. Korzystając z kątomierza, stwórzcie z grubszego papieru wzornik takiego kąta.
2. Sprawdźcie, gdzie ten kąt występuje w roślinach i zdjęciach, które macie przed sobą.
3. Można przy pomocy tego wzornika dobrze narysować kwiat. Zaczniście rysować kolejne płatki obracając rysunek za każdym razem o kąt α . Gdy zaczną się częściowo nakładać rysujcie płatki tak jak by były pod spodem, za to nieco większe. Narysujcie dwa rysunki – z węższymi i szerokimi płatkami. Przy okazji – widzicie od razu powstające spirale? Ile ich jest na pierwszym, a ile na drugim rysunku?

5 Dlaczego tak?

1. Obejrzyjcie ten filmik (<https://youtu.be/9Qy8QnNqB4A>), w którym krople z magnetycznej cieczy upuszczane są na płytkę. Krople przyciągane są przez obwód płytki, ale odpychają się wzajemnie. Jak się zachowują? Dlaczego? Jaki to ma związek z liczbą φ ?
2. A jaki to ma związek z procesem wzrostu kolejnych liści w roślinie? Czy rośliny muszą umieć mierzyć kąty, żeby tak rosnąć? Postawcie hipotezę, jaki mechanizm stoi za takim rodzajem wzrostu. Poszukajcie w Internecie innych hipotez w tej sprawie i źródeł popularnonaukowych lub naukowych, które wyjaśniają to zjawisko.