

Wszechświat liczb
1. Planeta naturalna
Architektura: ciąg Fibonacciego
skrypt warsztatowy

spisał: Michał Korch

8 kwiecień 2017

1 Ciąg Fibonacciego

1. Weźcie kartkę w kratkę i pogrubcie boki jednej z krutek (gdzieś po środku). To Wasz pierwszy kwadrat 1×1 . Zaznaczcie jego lewy dolny wierzchołek. Dorysujcie do tego kwadratu kolejny kwadrat 1×1 przylegający do niego od góry. Następnie narysujcie kwadrat 2×2 przylegający do dotychczasowych kwadratów z lewej strony. Teraz pora na kwadrat 3×3 od dołu. Następnie kwadrat 5×5 z prawej strony. Kontynuujcie w ten sposób rysowanie coraz większych (tak, że bok nowego kwadratu to bok dotychczasowego prostokąta) kwadratów z kolejnych stron dotychczasowego rysunku z kolejnych stron zgodnie ze wskazówkami zegara.
2. Następnie poczynając od zaznaczonego wierzchołka narysujcie łamaną składającą się z przekątnych kolejno narysowanych kwadratów. Naszkicujcie możliwie gładką spiralę przechodzącą przez kolejne wierzchołki łamanej. Przed Tobą spirala Fibonacciego.
3. Jak pewnie zauważyliście, boki kolejnych kwadratów na Waszym rysunku to kolejne liczby z ciągu Fibonacciego. Ciąg ten zaczyna się dwoma jedynkami, a kolejny wyraz jest zawsze sumą dwóch poprzednich. Czyli kolejne wyrazy to:

$$1, 1, 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 5 = 3 + 2, 8 = 5 + 3, \dots$$

Obliczcie jeszcze 9 kolejnych wyrazów tego ciągu.

2 Złota proporcja

1. Policzcie kolejne ilorazy znalezionych liczb z ciągu Fibonacciego, czyli (używając kalkulatora) podzielcie drugą liczbę przez pierwszą, trzecią przez drugą, czwartą przez trzecią i tak dalej. Co obserwujecie?
2. Ten ciąg ilorazów jest coraz bliższy do tak zwanej złotej proporcji, która wynosi:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Policzcie na kalkulatorze powyższą liczbę i sprawdźcie, że rzeczywiście wyrazy ciągu ilorazów są do niej coraz bliższe.

3. Liczba φ jest nazywana czasem „najprostszą niewymierną liczbą” lub „najbardziej niewymierną liczbą”. Liczby niewymierne to takie liczby, których nie da się zapisać w postaci p/q , gdzie obie liczby p, q są całkowite, przy czym $q \neq 0$. Inne przykłady liczb niewymiernych, poza φ , to chociażby π , czy też $\sqrt{2}$. Liczbami niewymiernymi jeszcze się zajmiemy w przyszłości, ale teraz spróbujmy udowodnić, że φ jest rzeczywiście niewymierna. Spróbujcie zastanowić się jak tego dokonać, a w razie czego niżej przygotowałem kilka wskazówek.
Wskazówka: Załóżmy przeciwnie, że są takie liczby całkowite p, q , że $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{p}{q}$. Przekształćcie to równanie tak, żeby nie mieć w nim pierwiastka.
Wskazówka: Czyli w takim razie 5 jest ilorzem kwadratów dwóch liczb całkowitych: $a^2 = (2p-q)^2$ oraz q^2 . Rozważ teraz podzielność przez potęgę piątki licznika i mianownika. Skoro to kwadraty, to każdy, jeśli się dzieli przez 5, to musi się dzielić przez 25, czyli generalnie i licznik i mianownik dzieli się na pewno przez parzystą potęgę dwójki. Zatem ich iloraz? A tym czasem lewa strona...
4. Wiemy już, że φ jest liczbą niewymierną. Dlaczego jest więc „najbardziej niewymierną”? Otóż każdą liczbę można rozłożyć w ułamek łańcuchowy. Co to ułamek łańcuchowy? Przyjrzyjmy się na przykładzie. Np.:

$$\frac{43}{5} = 8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}},$$

co łatwo sprawdzić, sprowadzając kolejne dodawania do wspólnego mianownika. Tymczasem liczby niewymierne rozpisują się w nieskończone ułamki łańcuchowe, czyli:

$$\square + \frac{1}{\square + \frac{1}{\square + \frac{1}{\square + \frac{1}{\dots}}}}.$$

Co trzeba wstawić za $\square$, żeby dostać liczbę φ ? Najprostsza możliwa liczba jest najlepsza! Właśnie dlatego φ jest „najprostszą niewymierną liczbą” lub „najbardziej niewymierną liczbą”. Sprawdź kolejne przybliżenia obcinając ułamek łańcuchowy w którymś miejscu.
Wskazówka: 1.

3 Złota proporcja u starożytnych Greków

1. Wszystko wskazuje na to, że już starożytni Grecy znali złotą proporcję. Zauważyli także, że proporcje z nią związane wydają się naturalne i przyjemne dla ludzkiego oka. Dostaliście rysunek przedstawiający rekonstrukcję Partenonu – słynnej głównej świątyni na ateńskim Akropolu. Posługując się linijką, kalkulatorem i nożyczkami stwórzcie z kartki papieru kilka odpowiednich prostokątnych wzorców oraz znajdźcie możliwie dużo par długości elementów architektonicznych na rysunku Partenonu, które są względem siebie w złotej proporcji.
2. Przez kolejne wieki to właśnie złote proporcje wyznaczały kanon piękna w architekturze. Na kolejnym rysunku znajdziecie fasadę katedry Norte Dame w Paryżu. Które pary odcinków są właśnie w takiej proporcji?

4 Uniwersytet Dzieci

1. Kolej na Was. Zaprojektujcie budynek Uniwersytetu Dzieci korzystając ze złotych proporcji. Zaprojektujcie jego rozmiar i fasadę. Możecie zaprojektować też przeznaczenie i rozkład poszczególnych pięter. Wykonajcie staranne rysunki (macie do dyspozycji papier milimetrowy). Zatwierdźcie swój projekt u prowadzącego zajęcia.
2. Pora przejść do budowy modelu Waszego Uniwersytetu. Dostaliście materiały, które możecie w tym celu wykorzystać. Zastanówcie się, co z czego zbudujecie i jak zadbać o stabilność konstrukcji. Wybierzcie też skalę, w której chcecie budować model swojego Uniwersytetu.
3. Do dzieła!