

Algebra liniowa, WNE, 2018/2019
kolokwium 3. poprawkowe– rozwiązania

24 stycznia 2019

Zadanie 1.

Oblicz

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{11}.$$

Rozwiązanie: Niech $\varphi: R^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie takie, że

$$M(\varphi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Wtedy wielomian charakterystyczny, to

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ -3 & -1-\lambda & -3 \\ 3 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(-1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Więc wartości własne to -1 i 2 .

Badamy $V_{(-1)}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

więc baza $V_{(-1)}$ to: $\{(-1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$.

Badamy $V_{(2)}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

więc baza $V_{(2)}$ to: $\{(0, 1, -1)\}$.

Zatem $\mathcal{A} = \{(-1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, -1)\}$ jest bazą złożoną z wektorów własnych, i:

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Mamy też:

$$M(\text{id})_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ: $(1, 0, 0) = -(-1, 0, 1) + (0, 1, 0) - (0, 1, -1)$, $(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$, oraz $(0, 0, 1) = (0, 1, 0) - (0, 1, -1)$,
to:

$$M(\text{id})_{st}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zatem:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{11} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{11} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2048 \\ -1 & 0 & -2048 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2049 & -1 & -2049 \\ 2049 & 0 & 2048 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zadanie 2.

Niech $V \subseteq \mathbb{R}^4$ będzie podprzestrzenią liniową, taką że $V^\perp = \text{lin}((1, 0, -1, 2))$. Znajdź:

- (a) bazę przestrzeni V ,
- (b) bazę ortogonalną przestrzeni V ,
- (c) współrzędne wektora $(-3, 2017, -1, 1)$ w tej bazie,
- (d) bazę ortonormalną przestrzeni V ,
- (e) wektory $\alpha, \beta \in V$, takie że kąt pomiędzy nimi wynosi 45° , oraz $|\alpha| = 2$, $|\beta| = 2\sqrt{2}$.

Rozwiązanie:
Znajdujemy:

- (a) bazę przestrzeni V

V opisana jest równaniem $x - z + 2t = 0$. Rozwiązanie ogólne to $(z - 2t, y, z, t)$, więc baza to

$$\{(0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-2, 0, 0, 1)\}.$$

- (b) bazę ortogonalną przestrzeni V

Stosujemy ortogonalizację Grama-Schmidta:

$$v_1 = (0, 1, 0, 0),$$

$$v_2 = (1, 0, 1, 0) - 0(0, 1, 0, 0) = (1, 0, 1, 0),$$

$$v_3 = (-2, 0, 0, 1) - 0(0, 1, 0, 0) + \frac{2}{2}(1, 0, 1, 0) = (-1, 0, 1, 1).$$

Zatem baza ortogonalna to: $\{(0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-1, 0, 1, 1)\}$.

- (c) współrzędne wektora $(-3, 2017, -1, 1)$ w tej bazie

Te współrzędne to 2017 , $-4/2 = -2$ oraz $3/3 = 1$.

- (d) bazę ortonormalną przestrzeni V

Dzielimy przez długości i mamy:

$$\left\{ (0, 1, 0, 0), \frac{(1, 0, 1, 0)}{\sqrt{2}}, \frac{(-1, 0, 1, 1)}{\sqrt{3}} \right\}$$

- (e) wektory $\alpha, \beta \in V$, takie że kąt pomiędzy nimi wynosi 45° , oraz $|\alpha| = 2$, $|\beta| = 2\sqrt{2}$.

Wystarczy wziąć jako α dwa razy pierwszy wektor z tej bazy, a jako β dwa razy sumę pierwszego i drugiego, czyli:

$$\alpha = (0, 2, 0, 0),$$

$$\beta = (\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 0).$$

Zadanie 3.

Niech $V = \text{lin}((1, 0, 2), (0, 1, -2)) \subseteq \mathbb{R}^3$. Niech φ będzie rzutem na V , a ψ – symetrią względem $V^\perp$.

- Znajdź bazę złożoną z wektorów własnych φ i macierz tego przekształcenia w tej bazie.
- Znajdź bazę złożoną z wektorów własnych ψ i macierz tego przekształcenia w tej bazie.
- Znajdź wzór na φ .

Rozwiązania:

Znajdźmy bazę $V^\perp$. Jest ona opisana układem równań:

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases},$$

zatem baza to $\{(-2, 2, 1)\}$. Zatem $\mathcal{A} = \{(1, 0, 2), (0, 1, -2), (-2, 2, 1)\}$ to baza złożona z wektorów własnych zarówno φ , jak i ψ , oraz:

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mamy też:

$$M(\text{id})_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Potrzebujemy także $M(\text{id})_{st}^{\mathcal{A}}$:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{r_3 - r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{r_3 + 2r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{r_3 \cdot (1/9)} \\ &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/9 & 2/9 & 1/9 \end{array} \right] &\xrightarrow{r_1 + 2r_3, r_2 - 2r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/9 & 4/9 & 2/9 \\ 0 & 1 & 0 & 4/9 & 5/9 & -2/9 \\ 0 & 0 & 1 & -2/9 & 2/9 & 1/9 \end{array} \right] \end{aligned}$$

więc:

$$M(\text{id})_{st}^{\mathcal{A}} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

W takim razie:

$$\begin{aligned} M(\varphi)_{st}^{st} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zatem ostatecznie $\varphi((x, y, z)) = 1/9(5x + 4y + 2z, 4x + 5y - 2z, 2x - 2y + 8z)$.

Zadanie 4.

Niech M będzie płaszczyzną przechodzącą przez punkt $(1, 1, -3, 5)$ oraz równoległą do płaszczyzny N przechodzącej przez punkty $(1, 0, 1, -1)$, $(2, 1, 0, 1)$ i $(1, 1, 1, 1)$. Znajdź:

- a) bazę przestrzeni $\vec{N}$,
- b) układ równań opisujących $\vec{N}$
- c) układ równań opisujących M ,
- d) parametryzację płaszczyzny M .
- e) punkt przecięcia płaszczyzny M oraz prostej $L = \text{lin}((1, 0, 1, -3))$, o ile taki punkt istnieje.

Rozwiązanie:

Znajdujemy

- a) bazę przestrzeni $\vec{N}$,

$$\vec{N} = \text{lin}((2, 1, 0, 1) - (1, 0, 1, -1), (1, 1, 1, 1) - (1, 0, 1, -1)) = \text{lin}((1, 1, -1, 2), (0, 1, 0, 2)).$$

- b) układ równań opisujących $\vec{N}$,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right],$$

a zatem szukany układ równań to:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ -2y + t = 0 \end{cases}.$$

- c) układ równań opisujących M ,

Ponieważ $\vec{N} = \vec{M}$, to szukany układ równań to:

$$\begin{cases} x + z = -2 \\ -2y + t = 3 \end{cases}.$$

- d) parametryzację M ,

Ponieważ $x = -2 - z$ oraz $t = 3 + 2y$, dostajemy $M = \{(-2 - z, y, z, 3 + 2y) : y, z \in \mathbb{R}\}$.

- e) punkt przecięcia płaszczyzny M oraz prostej $L = \text{lin}((1, 0, 1, -3))$, o ile taki punkt istnieje.

Punkty L , to $(a, 0, a, -3a)$, $a \in \mathbb{R}$, co po wstawieniu do równań na M , daje $2a = -2$ oraz $-3a = 3$, zatem $a = -1$ i punkt ten to $(-1, 0, -1, 3)$.