

Algebra liniowa, WNE, 2018/2019
kolokwium 3. dodatkowe – rozwiązania

24 stycznia 2019

Zadanie 1

Oblicz $\begin{bmatrix} -16 & 0 & 30 \\ 0 & -1 & 0 \\ -9 & 0 & 17 \end{bmatrix}^{2019}$.

Rozwiązanie:
Liczymy wielomian charakterystyczny:

$$w(\lambda) = (-1 - \lambda)((-16 - \lambda)(17 - \lambda) - (-9 \cdot 30)) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2),$$

czyli wartości własne to: -1 i 2 . Liczymy bazy przestrzeni własnych:

$$V_{(-1)} : \begin{bmatrix} -15 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 18 \end{bmatrix},$$

czyli baza to $\{(0, 1, 0), (2, 0, -1)\}$.

$$V_{(2)} : \begin{bmatrix} -18 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 15 \end{bmatrix},$$

czyli baza to $\{(5, 0, 3)\}$. Zatem $\mathcal{A} = \{(0, 1, 0), (2, 0, -1), (5, 0, 3)\}$ jest bazą własną oraz $M(\text{id})_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

i macierz w tej bazie to $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ponieważ:

- $(1, 0, 0) = 3(2, 0, 1) - (5, 0, 3),$
- $(0, 1, 0) = (0, 1, 0),$
- $(0, 0, 1) = -5(2, 0, 1) + 2(5, 0, 3),$

to $M(\text{id})_{st}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Zatem:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -16 & 0 & 30 \\ 0 & -1 & 0 \\ -9 & 0 & 17 \end{bmatrix}^{2017} &= M(\text{id})_{\mathcal{A}}^{st} D^{2017} M(\text{id})_{st}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2019} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \cdot 2^{2019} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \cdot 2^{2019} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 - 5 \cdot 2^{2019} & 0 & 10 + 10 \cdot 2^{2019} \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 - 3 \cdot 2^{2019} & 0 & 5 + 6 \cdot 2^{2019} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zadanie 2.

Niech $\alpha = (1, 0, 1, 0)$, $\delta = (0, 0, 0, 1)$.

- a) Znajdź wektory β, γ prostopadłe do wektora δ oraz takie, że kąty pomiędzy α i β , α i γ oraz β i γ wynoszą 60° .
- b) Niech $V = \text{lin}(\alpha, \beta, \gamma)$. Znajdź układ równań opisujący $V^\perp$.
- c) Znajdź dowolną bazę ortogonalną przestrzeni V .
- d) Znajdź dowolną bazę ortonormalną przestrzeni V .
- e) Oblicz współrzędne wektora $(1, 2, 3, 0)$ w znalezionej bazie ortonormalnej.

Rozwiązanie:

- a) Zauważmy, że $\cos(60^\circ) = 1/2$. Zatem dla $\beta = (1, 1, 0, 0)$, $\gamma = (0, 1, 1, 0)$, są oczywiście prostopadłe do δ oraz

$$\frac{\langle \beta, \gamma \rangle}{|\beta||\gamma|} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{\langle \alpha, \gamma \rangle}{|\alpha||\gamma|} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha||\beta|} = \frac{1}{2}.$$

- b) Zatem $V^\perp$ to:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

- c) Stosujemy ortogonalizację Gramma-Schmidta:

$$w_1 = (1, 0, 1, 0),$$

$$w_2 = (1, 1, 0, 0) - \frac{1}{2}(1, 0, 1, 0) = \frac{1}{2}(1, 2, -1, 0),$$

$$w_3 = (0, 1, 1, 0) - \frac{1}{2}(1, 0, 1, 0) - \frac{1}{6}(1, 2, -1, 0) = \frac{1}{3}(-2, 2, 2, 0).$$

A zatem baza ortogonalna, to np.: $\{(1, 0, 1, 0), (1, 2, -1, 0), (-2, 2, 2, 0)\}$.

- d) Normalizujemy wektory powyższe wektory, dzieląc je przez długość otrzymujemy bazę:

$$\frac{(1, 0, 1, 0)}{\sqrt{2}}, \frac{(1, 2, -1, 0)}{\sqrt{6}}, \frac{(-2, 2, 2, 0)}{2\sqrt{3}}.$$

- e) Współrzędne to:

$$\left\langle \frac{(1, 0, 1, 0)}{\sqrt{2}}, (1, 2, 3, 0) \right\rangle = 4/\sqrt{2} = 2\sqrt{2},$$

$$\left\langle \frac{(1, 2, -1, 0)}{\sqrt{6}}, (1, 2, 3, 0) \right\rangle = 2/\sqrt{6} = \sqrt{6}/3$$

oraz

$$\left\langle \frac{(-2, 2, 2, 0)}{2\sqrt{3}}, (1, 2, 3, 0) \right\rangle = 8/2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}/3.$$

Zadanie 3.

Niech $V^\perp = \text{lin}((1, 0, -1), (2, 1, 0))$. Niech przekształcenie φ będzie rzutem na przestrzeń $V^\perp$. Podaj bazę złożoną z wektorów własnych tego przekształcenia. Znajdź jego wzór.

Rozwiązanie:

Zatem V jest zadane układem równań:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Czyli $V = \text{lin}((1, -2, 1))$. Zatem $\mathcal{A} = \{(1, 0, -1), (2, 1, 0), (1, -2, 1)\}$ jest bazą własną szukanego przekształcenia z wartościami własnymi odpowiednio 1, 1, 0, czyli $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $M(\text{id})_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Zostaje do wyliczenia

$$M(\text{id})_{st}^{\mathcal{A}} = (M(\text{id})_{\mathcal{A}}^{st})^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Zatem:

$$\begin{aligned} M(\varphi)_{st}^{st} &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

a zatem $\varphi((x, y, z)) = \frac{1}{6}(5x + 2y - z, 2x + 2y + 2z, -x + 2y + 5z)$.

Zadanie 4.

Znajdź układ równań oraz parametryzację prostej L przechodzącej przez punkt $(1, 0, 0)$ oraz prostopadłej do płaszczyzny opisanej równaniem $x - 2y + z = \pi$. Następnie znajdź punkt będący obrazem symetrycznym punktu $(1, 1, 1)$ względem prostej L .

Rozwiązanie:

$T(M) = (T(L))^\perp$, gdzie M to płaszczyzna $x - 2y + z = \pi$. Zatem $T(M) = T(L)^\perp$ jest opisana równaniem $x - 2y + z = 0$, w szczególności

$$L = (1, 0, 0) + \text{lin}((1, -2, 1)).$$

A zatem parametryzacja tej prostej to:

$$\{(1 + t, -2t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Natomiast baza $T(M) = (T(L))^\perp$ to $\{(-1, 0, 1), (2, 1, 0)\}$, a zatem $T(L)$ opisana jest układem:

$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Czyli:

$$\begin{cases} -x + z = -1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

Na prostej L leży np. punkt $(1, 0, 0)$, więc będziemy rozważać symetrię $q = (1, 1, 1) - (1, 0, 0) = (0, 1, 1)$ względem $T(L) = \text{lin}((1, -2, 1))$. Rzut to $\frac{-1}{6}(1, -2, 1)$, czyli symetria to $s' = \frac{1}{3}(-1, 2, -1) - (0, 1, 1) = \frac{1}{3}(-1, -1, -4)$. A zatem szukany punkt to: $\frac{1}{3}(-1, -1, -4) + (1, 0, 0) = \frac{1}{3}(2, -1, -4)$.