

Algebra liniowa, WNE, 2018/2019
kolokwium 2., poprawkowe – rozwiązania

22 stycznia 2019

Zadanie 1.

Niech $\mathcal{A} = \{(-1, 1), (0, -1)\}$, $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$,
 $\mathcal{C} = \{(1, 0, 1, 1), (-1, 0, 0, 1), (0, 2, 0, 1), (0, 0, 1, -1)\}$ oraz niech $\phi, \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będą zadane tak, iż:

- $\varphi((x, y)) = (y, x + y, -2x)$,
- $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,
- $M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$,

Oblicz:

- współrzędne wektora $\psi(v)$ w bazie $\mathcal{C}$, jeśli wektor v ma w bazie $\mathcal{B}$ współrzędne $1, 1, 1$.
- $M(\varphi)_{st}^{st}$,
- $M(\text{id})_{st}^{\mathcal{B}}$,
- $M(2\psi \circ (\varphi + \phi))_{st}^{st}$,
- wzór przekształcenia $2\psi \circ (\varphi + \phi)$.
- współrzędne wektora $\psi(v)$ w bazie $\mathcal{C}$, jeśli wektor v ma w bazie $\mathcal{B}$ współrzędne $1, 1, 1$.

W takim razie szukane współrzędne to

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

czyli $0, -1, -2, 2$.

- $M(\varphi)_{st}^{st}$,

$$M(\varphi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- $M(\text{id})_{st}^{\mathcal{B}}$,

$$M(\text{id})_{st}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- $M(2\psi \circ (\varphi + \phi))_{st}^{st}$,

$$\begin{aligned}
M(2\psi \circ (\varphi + \phi))_{st}^{st} &= 2M(\text{id})_{\mathcal{C}}^{st} M(\psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} M(\text{id})_{st}^{\mathcal{B}} (M(\varphi)_{st}^{st} + M(\phi)_{\mathcal{A}}^{st} M(\text{id})_{st}^{\mathcal{A}}) = \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\quad \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) = \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 0 \\ 2 & 6 & -4 \\ 0 & -12 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right) = \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 0 \\ 2 & 6 & -4 \\ 0 & -12 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 12 & -12 \\ -2 & 18 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

- wzór przekształcenia $2\psi \circ (\varphi + \phi)$.

Zatem $2\psi \circ (\varphi + \phi)(x, y) = (-2y, 12x - 12y, -2x + 18y)$.

Zadanie 2.

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\varphi: V \rightarrow V$ przekształceniem liniowym oraz $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ pewnymi bazami przestrzeni V . Wiadomo, że $A = M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz macierz zmiany bazy z $\mathcal{B}$ na $\mathcal{A}$ to $M(\text{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \text{ Obliczyć:}$$

- $M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$,
- $M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ (wskazówka: $M(\text{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = (M(\text{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-1}$),
- znajdź element w 3. wierszu i 1. kolumnie macierzy A^{-1} .

Rozwiązanie:

$$M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \cdot M(\text{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Obliczamy $M(\text{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = (M(\text{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-1}$:

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 + 2w_1, w_3 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_3, w_2 - w_3} \\
&\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 \cdot (-1), w_2 \cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Zatem:

$$M(\text{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i:

$$M(\varphi)_B^B = M(\text{id})_A^B \cdot M(\varphi)_B^A = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 12 \\ 15 & -2 & 17 \\ -7 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

W końcu szukany element to $(-1)^4 \cdot \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1} = 1$.

Zadanie 3.

Korzystając z Tw. Cramera sprawdzić dla jakich s poniższy układ jest sprzeczny, a dla jakich oznaczony oraz rozwiązać dla $s = -3$

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + sx_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zauważamy, że $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & s \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -s + 1 - 2 - 1 = -s - 2$, czyli dla $s \neq -2$ układ ten jest oznaczony. Sprawdzamy,

że dla $s = -2$ mamy na przykład $\det A_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, czyli w tym przypadku układ jest sprzeczny.

Wyliczamy rozwiązania dla $s = -3$:

$$x_1 = \frac{0}{1} = 0, x_2 = \frac{3}{1} = 3, x_3 = \frac{2}{1} = 2.$$

Zadanie 4.

Niech:

$$A = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2009 & 2010 & 2-s & 2011 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2012 & 2012 & 2012 & 2012 & 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2012 & 2012 & 2012 & 2012 & 2 & 2 & -1 & -6 & 1 \\ 2012 & 2012 & 2012 & 2012 & 1 & 2 & -10 & s+14 & 4 \\ 2012 & 2012 & 2012 & 2012 & 0 & 4 & 4 & -10 & -2 \\ 2012 & 2012 & 2012 & 2012 & -1 & -10 & 5 & -3-3s & s-13 \end{bmatrix}.$$

Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ macierz A jest odwracalna? Dla $s = 0$ oblicz $\det((-1)A^2A^TA^{-1})$.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że macierz jest w postaci blokowej, czyli jej wyznacznik jest iloczynem wyznaczników dwóch macierzy – lewej górnej i prawej dolnej. Liczymy osobno te wyznaczniki. Pierwszej z rozwinięcia Laplace'a względem 3. kolumny:

$$\begin{vmatrix} s & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2009 & 2010 & 2-s & 2011 \\ 2 & -3 & 0 & -s \end{vmatrix} = (-1)^6(2-s) \begin{vmatrix} s & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -s \end{vmatrix} = (2-s)(s+1)(s-1).$$

Drugą macierz sprowadzamy do postaci schodkowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & -10 & s+14 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & -10 & -2 \\ -1 & -10 & 5 & -3-3s & s-13 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - w_1, w_5 + w_1}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & s+17 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & -10 & -2 \\ 0 & -8 & 4 & -6-3s & s-13 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 + 2w_2, w_5 - 4w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & s+17 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6-3s & s-17 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_4} \\
& \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & s+17 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6-3s & s-17 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \cdot \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & s+17 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6-3s & s-17 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 + 3w_3} \\
& \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s+2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6-3s & s-17 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_5 + 3w_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s+2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Zatem wyznacznik tej części to $(-1) \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot (s+2)(s-5) = 12(s+2)(s-5)$. Zatem A jest odwracalna dla $s \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 5)$.

Wyznacznik A dla $s = 0$ wynosi $2 \cdot 12 \cdot 2 \cdot (-5) = -240$. $\det((-1)A^2 A^T A^{-1}) = (-1)^9 (\det A)^2 = -(-240)^2 = -57600$.