

Analiza matematyczna 2, 2016/2017

zadania domowe poprawkowe – rozwiązania

30 maja 2017

Seria 1

1. Korzystając z kryterium porównawczego wykaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 5n}$ jest zbieżny. Policz jego sumę.

Zauważmy, że dla $n \geq 1$, mamy $0 \leq \frac{1}{n^2 + 5n} \leq \frac{1}{n^2}$. Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, to zbieżny jest i badany szereg.

Zauważam, że $\frac{1}{n^2 + 5n} = \frac{1}{n(n+5)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+5} \right)$. Liczę sumy częściowe

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{7} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+5} \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \right) \rightarrow \frac{1}{5} \cdot \frac{137}{60} = \frac{137}{300}. \end{aligned}$$

A zatem: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 5n} = \frac{137}{300}$.

2. Zbadaj zbieżność szeregu oraz sprawdź, czy jest on zbieżny bezwzględnie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt[3]{n^3 + 1}}.$$

Zauważam, że $\sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{n+1}$. A zatem jest on zbieżny z kryterium Leibniza, bowiem $\frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + 1}} \rightarrow 0$. Natomiast:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + 1}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + n^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{n},$$

ale jak wiadomo szereg harmoniczny nie jest zbieżny, więc badany szereg (na mocy kryterium porównawczego) nie jest zbieżny bezwzględnie.

Seria 2

1. Zbadaj zbieżność ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = |\sin x|^n$$

na całej prostej rzeczywistej. Udowodnij, że f_n zbiega jednostajnie na odcinku $[0, \pi/4]$.

Jeśli $0 \leq a < 1$, to $a^n \rightarrow 0$, natomiast $1^n = 1$ jest stałe i zbiega do 1. Dlatego ten ciąg funkcji punktowo zbiega do:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ dla } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \\ 1 & \text{wpp.} \end{cases}$$

Ponieważ funkcje f_n są ciągłe, a f nie jest na pewno nie jest to zbieżność jednostajna.

Co innego, jeśli ograniczymy się do odcinka $[0, \pi/4]$. Na tym odcinku maksymalną wartość funkcja $\sin x$ przyjmuje w punkcie $x = \pi/4$ i jest to wartość $\frac{\sqrt{2}}{2}$. A zatem, dla dowolnego $\varepsilon > 0$, znajdę takie N , że dla $n > N$ mam $|f_n(x) - 0| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n < \varepsilon$, mianowicie wystarczy, że $N = \left\lceil \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \varepsilon \right\rceil$.

2. Zbadaj zbieżność szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n+1)!}{(n+1)^n} (x+2017)^n.$$

Możesz skorzystać z bez dowodu z faktu, że $n! > \frac{n^n}{e^n}$.

Badamy promień zbieżności

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n} \rightarrow \frac{2}{e}.$$

A zatem promień zbieżności to $\frac{e}{2}$, czyli szereg na pewno zbiega bezwzględnie dla $x \in \left(-2017 - \frac{e}{2}, -2017 + \frac{e}{2}\right)$. Pozostaje sprawdzić dla $x = -2017 \pm \frac{e}{2}$. Zauważ, że wtedy mamy szereg: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n (n+1)! e^n}{(n+1)^n}$. Ale korzystamy z faktu z treści zadania, i dowiadujemy się, że moduł tego wyrażenia $\frac{e^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \geq 1$, a zatem $\frac{e^n (n+1)!}{(n+1)^n} \geq \frac{n+1}{e}$, a zatem szereg nie może być zbieżny w żadnym z tych przypadków, bo kolejne wyrazy nie zbiegają do zera. A zatem zbiór punktów zbieżności to: $\left(-2017 - \frac{e}{2}, -2017 + \frac{e}{2}\right)$.

Seria 3

1. Oblicz następującą liczbę:

$$z = \frac{(-\sqrt{3} - i)^{2007}}{i^{2016} (1 - i)^{4012}}$$

a następnie wylicz $\sqrt[3]{z}$.

	x	$ x $	$Arg x$
	$-\sqrt{3} - i$	2	$-\frac{5\pi}{6}$
	i	1	$\frac{\pi}{2}$
	$1 - i$	$\sqrt{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
Wyliczamy moduły i argumnty:	$(-\sqrt{3} - i)^{2007}$	2^{2007}	$-\frac{\pi}{2}$
	i^{2016}	1	0
	$(1 + i)^{4012}$	2^{2006}	π
	$i^{2016} (1 - i)^{4012}$	2^{2006}	π
	z	2	$\frac{\pi}{2}$

A zatem $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i$

	x	$ x $	$Arg x$
	z	2	$\frac{\pi}{2}$
Wyliczamy pierwiastki:	$\sqrt[3]{z}$	$\sqrt[3]{2}$	$\frac{\pi}{6}$
	$\sqrt[3]{z}$	$\sqrt[3]{2}$	$\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$
	$\sqrt[3]{z}$	$\sqrt[3]{2}$	$\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$

A zatem te pierwiastki to:

$$\sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} (\sqrt{3} + i),$$

$$\sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} (-\sqrt{3} + i),$$

$$\sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2} \right) = -\sqrt[3]{2} i.$$

2. Rozwiń w szereg Taylora funkcję $f(x) = \sin 3x - \cos 3x$ w punkcie $x_0 = \pi$. Jaki jest przedział zbieżności tego szeregu? Oszacuj błąd, z jakim suma pierwszych 3 wyrazów tego szeregu daje wartość $f(3)$.

Liczmy pochodne:

$$f'(x) = 3 \cos 3x + 3 \sin 3x,$$

$$f''(x) = -9 \sin 3x + 9 \cos 3x,$$

$$f'''(x) = -27 \cos 3x - 27 \sin 3x,$$

a więc ogólnie:

$$f^{(n)}(x) = 3^n \left((-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \sin 3x + (-1)^{\lfloor (n+3)/2 \rfloor} \cos 3x \right).$$

A zatem szereg mamy następujący:

$$f(x) = 1 - \frac{3}{2}(x - \pi) - \frac{27}{3!}(x - \pi)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \cdot (-1)^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}}{n!} (x - \pi)^n.$$

Liczę promień zbieżności: $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3}{n+1} \rightarrow 0$. A zatem $R = \infty$ i szereg jest zbieżny na całej prostej.

Reszta po 3 wyrazach dla $f(3)$ to $R = \frac{-27 \cos 3\theta - 27 \sin 3\theta}{3!}(\pi - 3)^n$, gdzie $\theta \in (3, \pi)$, więc $R < \frac{54}{6}(0, 2)^3 = 9 \cdot 0,008 \leq 0,08$.

Seria 4

1. Oblicz:

$$\int (3x - 2)^3 \cdot \ln |3x - 2| dx.$$

Całkujemy przez części:

$$\begin{aligned} \int (3x + 2)^3 \cdot \ln(3x - 2) dx &= \frac{1}{3} \int y^3 \cdot \ln y dy \quad \boxed{f(y) = y^4/4, g(y) = \ln y} \\ &= \frac{y^4 \ln y}{12} + \frac{1}{3} \int \frac{y^4}{4y} dy = \frac{y^4 \ln y}{12} + \frac{y^4}{48} = \frac{(3x - 2)^4 \ln(3x - 2)}{12} + \frac{(3x - 2)^4}{48}. \end{aligned}$$

2. Oblicz:

$$\begin{aligned} &\int \frac{2e^{4x} (2e^{4x} + 2e^{2x} - 1)}{(e^{2x} - 1)^2 (e^{4x} + e^{2x} + 1)} dx. \\ &\int \frac{2e^{4x} (2e^{4x} + 2e^{2x} - 1)}{(e^{2x} - 1)^2 (e^{4x} + e^{2x} + 1)} dx \quad \boxed{t = e^{2x}, \frac{dt}{dx} = 2e^{2x}} = \int \frac{t(2t^2 + 2t - 1)}{(t - 1)^2 (t^2 + t + 1)} dt = \\ &= \frac{A}{t - 1} + \frac{B}{(t - 1)^2} + \frac{Ct + D}{t^2 + t + 1} \quad \boxed{A = 2, B = 1, C = 0, D = 1} \\ &= \int \frac{2dt}{t - 1} + \int \frac{dt}{(t - 1)^2} + \int \frac{dt}{t^2 + t + 1} = \\ &= 2 \ln |t - 1| - \frac{1}{t - 1} + \frac{2 \arctg(2t + 1/\sqrt{3})}{\sqrt{3}} + C = 2 \ln |e^x - 1| - \frac{1}{e^x - 1} + \frac{2 \arctg(2e^x + 1/\sqrt{3})}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$