

Analiza matematyczna 2, 2016/2017

sprawdzian poprawkowy – rozwiązania

6 czerwca 2017

1. Zbadaj zbieżność ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{1}{nx}$$

na odcinku:

- a) $(0, 1)$,
- b) $(1, 2)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx} = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a zatem na obu odcinkach f_n zbiega punktowo do funkcji stałe równej 0.

Na odcinku $(0, 1)$ nie jest to zbieżność jednostajna. Rzeczywiście, niech $\varepsilon = 1$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $x = \frac{1}{n+1}$, to $|f(x) - 0| = \frac{n+1}{n} > 1 = \varepsilon$.

Ta zbieżność jest jednostajna na odcinku $(1, 2)$, bowiem jeśli $x \in (1, 2)$, to:

$$|f(x) - 0| = \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

2. Zbadaj zbieżność szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2017^n}{\sqrt[2017]{n}} (x - 2017)^n.$$

Rozwiązanie:

Z kryterium Cauchy'ego wiemy wyliczamy promień zbieżności:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2017}{(\sqrt[2017]{n})^{1/2017}} = \frac{2017}{1} = 2017.$$

A zatem promień zbieżności to $\frac{1}{2017}$. Czyli na pewno dla $x \in (2017 - 1/2017, 2017 + 1/2017)$. Trzeba jeszcze sprawdzić zbieżność na końcach.

Dla $x = 2017 + 1/2017$ mamy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2017]{n}}$, ale $\frac{1}{\sqrt[2017]{n}} \geq \frac{1}{n}$, a szereg harmoniczny nie jest zbieżny, więc ten szereg też nie jest zbieżny.

Dla $x = 2017 - 1/2017$ mamy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[2017]{n}}$ i ten szereg jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza, bo $\frac{1}{\sqrt[2017]{n}} \rightarrow 0$ jest malejącym ciągiem zbieżnym do zera. A zatem ostatecznie przedział zbieżności tego szeregu to $[2017 - 1/2017, 2017 + 1/2017)$.

3. Rozwiń funkcję $f(x) = \frac{1}{x^{2017}}$ w szereg Taylora w punkcie $x_0 = 1$. Zbadaj promień zbieżności tego szeregu oraz oblicz przybliżoną wartość $f(1,0001)$ na podstawie dwóch pierwszych wyrazów szeregu. Oszacuj resztę.

Liczymy pochodne i dostajemy, że:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2017x^{-2018} \\ f''(x) &= 2017 \cdot 2018x^{-2019} \end{aligned}$$

itd., zatem:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (2016+n)!}{2016!} x^{-2017-n},$$

czyli

$$f^{(n)}(1) = \frac{(-1)^n (2016+n)!}{2016!}.$$

W takim razie szukany szereg Taylora to:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2016+n)!}{n! \cdot 2016!} (x-1)^n.$$

Sprawdzamy promień zbieżności tego szeregu, korzystając z kryterium d'Alemberta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2016+n+1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{2016}{n+1} = 1,$$

zatem promień zbieżności to 1 i szereg zbiega dla $x \in (0, 2)$. Przybliżamy $f(1, 1)$ dwoma pierwszymi wyrazami, dostając:

$$f(1, 1) \simeq 1 - 2017 \cdot 0,0001 = 0,7983,$$

natomiast reszta dana jest:

$$\frac{2017 \cdot 2018}{2} \cdot (1-\theta)^2 = 2017 \cdot 1009 \cdot (1-\theta)^2 \leq 2017 \cdot 1009 \cdot (0,0001)^2 = 0.02035153,$$

bowiem $\theta \in (1; 1, 1)$.