Analiza matematyczna 2, 2015/2016
sprawdzian poprawkowy – rozwiązania

14 czerwca 2016

1. Zbadaj zbieżność szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2^n}}{(-3)^n \ln 2^n}(x+2016)^n.$$

Rozwiązanie:

Z kryterium Cauchy'ego wiemy wyliczamy promień zbieżności:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{n+1}{2}} 3^n \ln 2^n}{2^{\frac{n}{2}} 3^{n+1} \ln 2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2} n \ln 2}{3(n+1)\ln 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

A zatem promień zbieżności to $\frac{3\ln 2}{\sqrt{2}}$. Czyli na pewno dla $x + 2016 \in (-3/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2})$ szereg zbiega, czyli dla $x \in (-2016 - 3/\sqrt{2}, -2016 + 3/\sqrt{2})$. Trzeba jeszcze sprawdzić zbieżność na końcach.

Dla $x = -2016 - 3/\sqrt{2}$ mamy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2}$ i jest to szereg harmoniczny przemnożony przez $\frac{1}{\ln 2}$, więc nie jest zbieżny.

Dla $x = -2016 + 3/\sqrt{2}$ mamy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln 2}$ i ten szereg jest zbieżny na mocy kryterium Leinbiza, bo $\frac{1}{n \ln 2} \to 0$ jest malejącym ciągiem zbieżnym do zera. A zatem ostatecznie przedział zbieżności tego szeregu to $(-2016 - 3/\sqrt{2}, -2016 + 3/\sqrt{2}]$.

2. Zbadaj zbieżność szeregu oraz sprawdź, czy jest on zbieżny bezwzględnie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \sin \frac{1}{n^3}.$$

Rozwiązanie:

Zauważ, że dla $x > 0$, mamy $\sin x < x$, a zatem:

$$n \sin \frac{1}{n^3} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2},$$

a ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, to badany szereg jest zbieżny i to bezwzględnie.

3. Zbadaj zbieżność ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = e^{-nx^2}$$

na całej prostej rzeczywistej. Udowodnij, że f_n zbiega jednostajnie na odcinku $(1, 2)$.

Rozwiązanie:

Zauważ, że $f_n(x) = \frac{1}{(e^{x^2})^n}$. Takie wyrażenie zbiega do 0, o ile $e^{x^2} > 1$ (czyli, gdy $x^2 > 0$, czyli gdy $x \neq 0$) oraz zbiega do 1, o ile $e^{x^2} = 1$, czyli dla $x = 0$, a zatem funkcja, do której ten ciąg punktowo zbiega to:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & , \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Nie jest to zbieżność jednostajna, bo o ile funkcje f_n są, ciągłe, to f nie jest ciągła.

Zbieżność na odcinku $(1,2)$ jest jednak jednostajna, bowiem mamy:

$$\left|\frac{1}{e^{nx^2}} - 0\right| \leq \left|\left(\frac{1}{e^4}\right)^n - 0\right| = \left(\frac{1}{e^4}\right)^n,$$

co jest mniejsze od dowolnego $\varepsilon > 0$ dla odpowiednio dużych n, mianowicie dla $n > \log_{e^4} 1/\varepsilon$.