Analiza matematyczna 2, 2015/2016
sprawdzian – rozwiązania

12 kwietnia 2016

Wersja A

1. Zbadaj zbieżność ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \dfrac{x}{n} & \text{dla } x \in [0, n] \\ 1 & \text{dla } x > n, \end{cases}$$

$n \geq 1$ na całej prostej rzeczywistej. Udowodnij, że f_n zbiega jednostajnie na odcinku $(0, 2016)$.

Zauważmy, że dla każdego $x > 0$ i dla każdego $n > x$, mamy $f_n(x) = x/n \to 0$, zaś dla $x \leq 0$, $f_n(x) = 0$, a zatem ta funkcja punktowo zbiera do funkcji stale równej zero.

Ale zauważamy, że dla każdego n, mamy $f_n(n) = 1$, a zatem ten ciąg nie zbiega jednostajnie na całej prostej, bowiem np. dla $\varepsilon = \frac{1}{2}$, dla każdego n, znajdę x, mianowicie $x = n$, takie że $|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| \geq \varepsilon$.

Natomiast na odcinku $(0, 2016)$, ciąg zbiega jednostajnie. Niech $\varepsilon > 0$, wtedy dla $n > 2016$, mamy

$$|f_n(x) - 0| = \frac{x}{n} \leq \frac{2016}{n} < \varepsilon,$$

dla dostatecznie dużych n, mianowicie dla $n > \frac{2016}{\varepsilon}$.

2. Oblicz wyrażenie:

$$z = \frac{i^{2015}\left(\sqrt{3} - i\right)^{1036}}{(-1 + i)^{2016}}.$$

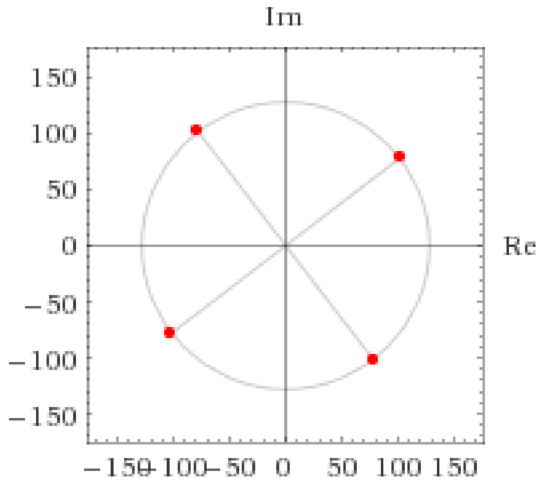
A następnie wylicz $\sqrt[4]{_+z}$ oraz zaznacz orientacyjnie na płaszczyźnie zespolonej pozostałe $\sqrt[4]{z}$.

Istotne jest, że 2015 dzieli się przez 4 z resztą 3, 1036 dzieli się przez 12 z resztą 4 oraz 2016 dzieli się przez 8.

Zatem:

x	$\lvert x\rvert$	$\mathrm{Arg}x$
i	1	$\frac{\pi}{2}$
$\sqrt{3} - i$	2	$-\frac{\pi}{6}$
$-1 + i$	$\sqrt{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$
i^{2015}	1	$-\frac{\pi}{2}$
$\left(\sqrt{3} - i\right)^{1036}$	2^{1036}	$-\frac{2\pi}{3}$
$(-1 + i)^{2016}$	2^{1008}	0
$i^{2015}\left(\sqrt{3} - i\right)^{1036}$	2^{1036}	$\frac{5\pi}{6}$
z	2^{28}	$\frac{5\pi}{6}$
$\sqrt[4]{_+z}$	2^7	$\frac{5\pi}{24}$

A zatem $z = 2^{27}(-\sqrt{3} + i)$ oraz $\sqrt[4]{_+z} = 2^7(\cos\frac{5\pi}{24}) + i \sin\frac{5\pi}{24}$. Pozostałe pierwiastki są rozmieszczone równomiernie, co $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ na okręgu o promieniu 128, czyli:



3. Rozwiń w szereg Taylora funkcję $f(x) = \ln(2x - 2015)$ w punkcie $x_0 = 1008$. Jaki jest przedział zbieżności tego szeregu? Sprawdź w szczególności jego zbieżność na końcach przedziału. Oszacuj wartość $f(1008,1)$ na podstawie sumy pierwszych 3 wyrazów tego szeregu i oszacuj błąde tego oszacowania (resztę).

   Liczymy pochodne:

$$f'(x) = \frac{2}{2x - 2015},$$
$$f''(x) = \frac{2^2 \cdot (-1)}{(2x - 2015)^2},$$
$$f'''(x) = \frac{2^3 \cdot 1 \cdot 2}{(2x - 2015)^3},$$
$$f^{(4)}(x) = \frac{2^4 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 3}{(2x - 2015)^4},$$

   a więc ogólnie:

$$f^{(n)}(x) = \frac{2^n \cdot (-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{(2x - 2015)^n}.$$

   A zatem szereg mamy następujący:

   W punkcie 1008 kolejne wartości pochodnych to: $f(1008) = \ln 1 = 0$, natomiast $f^{(n)}(1008) = 2^n \cdot (-1)^{n+1} \cdot (n-1)!$, a zatem mamy taki szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (-1)^{n+1}}{n} (x - 1008)^n$$

   (zwróć uwagę na to, że suma zaczyna się od $n = 1$, bo zerowy wyraz to po prostu zero).

   Na podstawie kryterium Cauchy'ego liczymy promień zbieżności:

$$\sqrt[n]{\left| \frac{2^n \cdot (-1)^{n+1}}{n} \right|} = \frac{2}{\sqrt[n]{n}} \to 2,$$

   A zatem promień to $\frac{1}{2}$, czyli szereg jest zbieżny dla $x - 1008 \in (-1/2, 1/2)$. A zatem $x \in (1007 + 1/2, 1008 + 1/2)$.

   Sprawdzamy zbieżność na końcach przedziału. Dla $x = 1007 + 1/2$ mamy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$, czyli szereg harmoniczy przemnożony przez -1 i nie jest on zbieżny. Dla $x = 1008+1/2$ mamy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ i jest on zbieżny na podstawie kryterium Leibniza. Zatem ostatecznie przedział zbieżności to $(1007+1/2, 1008+1/2]$.

   A zatem
$$f(1008,1) = 0 + \frac{2 \cdot 0,1}{1} - \frac{4 \cdot 0,01}{2} + R = 0,2 - 0,02 + R = 0,18 + R.$$

   Gdzie reszta jest przestawiona następująco ($\theta \in (1008,\ 1008,1)$):

$$R = \left| \frac{f'''(\theta)(0,1)^3}{3!} \right| = \left| \frac{2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0,001}{3! \cdot (2x - 2015)^3} \right| \le \frac{8 \cdot 0,001}{3 \cdot 1} \le 0,003.$$

Wersja B

1. Zbadaj zbieżność ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x < -n \\ \dfrac{-x}{n} & \text{dla } x \in [-n, 0] \\ 0 & \text{dla } x > 0, \end{cases}$$

$n \geq 1$ na całej prostej rzeczywistej. Udowodnij, że f_n zbiega jednostajnie na odcinku $(-2016, 0)$.

Zauważmy, że dla każdego $x < 0$ i dla każdego $n > -x$, mamy $f_n(x) = -x/n \to 0$, zaś dla $x \geq 0$, $f_n(x) = 0$, a zatem ta funkcja punktowo zbiera do funkcji stale równej zero.

Ale zauważamy, że dla każdego n, mamy $f_n(-n) = 1$, a zatem ten ciąg nie zbiega jednostajnie na całej prostej, bowiem np. dla $\varepsilon = \frac{1}{2}$, dla każdego n, znajdę x, mianowicie $x = -n$, takie że $|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| \geq \varepsilon$.

Natomiast na odcinku $(-2016, 0)$, ciąg zbiega jednostajnie. Niech $\varepsilon > 0$, wtedy dla $n > 2016$, mamy

$$|f_n(x) - 0| = \frac{-x}{n} \leq \frac{2016}{n} < \varepsilon,$$

dla dostatecznie dużych n, mianowicie dla $n > \frac{2016}{\varepsilon}$.

2. Oblicz wyrażenie:

$$z = \frac{(-1+i)^{2016}}{i^{2015}\left(\sqrt{3}-i\right)^{1000}}.$$

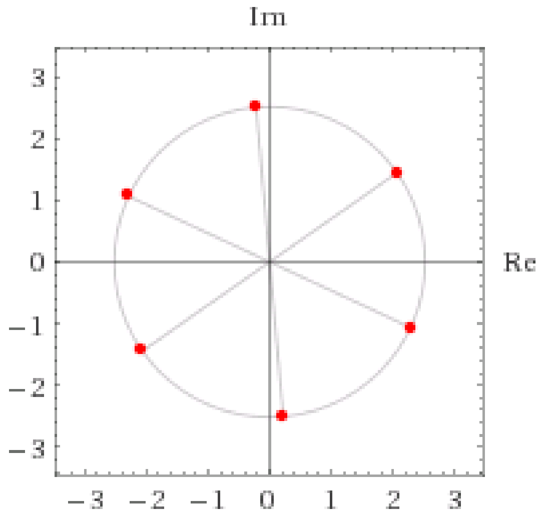
A następnie wylicz $\sqrt[6]{_+z}$ oraz zaznacz orientacyjnie na płaszczyźnie zespolonej pozostałe $\sqrt[6]{z}$.

Istotne jest, że 2015 dzieli się przez 4 z resztą 3, 1000 dzieli się przez 12 z resztą 4 oraz 2016 dzieli się przez 8.

Zatem:

x	$\lvert x\rvert$	$\mathrm{Arg}x$
$-1+i$	$\sqrt{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
i	1	$\frac{\pi}{2}$
$\sqrt{3}-i$	2	$-\frac{\pi}{6}$
$(-1+i)^{2016}$	2^{1008}	0
i^{2015}	1	$-\frac{\pi}{2}$
$\left(\sqrt{3}-i\right)^{1000}$	2^{1000}	$-\frac{2\pi}{3}$
$i^{2015}\left(\sqrt{3}-i\right)^{1000}$	2^{1000}	$\frac{5\pi}{6}$
z	2^8	$-\frac{5\pi}{6}$
$\sqrt[6]{_+z}$	$2^{\frac{4}{3}}$	$\frac{7\pi}{36}$

A zatem $z = 128(-\sqrt{3}-i)$ oraz $\sqrt[6]{_+z} = 2^{\frac{4}{3}}(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$. Pozostałe pierwiastki są rozmieszczone równomiernie, co $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ na okręgu o promieniu $2^{\frac{4}{3}}$, czyli:



3. Rozwiń w szereg Taylora funkcję $f(x) = \ln(2015 - 2x)$ w punkcie $x_0 = 1007$. Jaki jest przedział zbieżności tego szeregu? Sprawdź w szczególności jego zbieżność na końcach przedziału. Oszacuj wartość $f(1006,9)$ na podstawie sumy pierwszych 3 wyrazów tego szeregu i oszacuj błąde tego oszacowania (resztę).

   Liczymy pochodne:

$$f'(x) = \frac{-2}{2015 - 2x},$$
$$f''(x) = \frac{2^2}{(2015 - 2x)^2},$$
$$f'''(x) = \frac{-2^3 \cdot 1 \cdot 2}{(2015 - 2x)^3},$$
$$f^{(4)}(x) = \frac{2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{(2015 - 2x)^4},$$

   a więc ogólnie:

$$f^{(n)}(x) = \frac{2^n \cdot (-1)^n \cdot (n-1)!}{(2015 - 2x)^n}.$$

   A zatem szereg mamy następujący:

   W punkcie 1007 kolejne wartości pochodnych to: $f(1007) = \ln 1 = 0$, natomiast $f^{(n)}(1007) = 2^n \cdot (-1)^n \cdot (n-1)!$, a zatem mamy taki szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (-1)^n}{n} (x - 1007)^n$$

   (zwróć uwagę na to, że suma zaczyna się od $n = 1$, bo zerowy wyraz to po prostu zero).

   Na podstawie kryterium Cauchy'ego liczymy promień zbieżności:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{2^n \cdot (-1)^n}{n}\right|} = \frac{2}{\sqrt[n]{n}} \to 2,$$

   A zatem promień to $\frac{1}{2}$, czyli szereg jest zbieżny dla $x - 1007 \in (-1/2, 1/2)$. A zatem $x \in (1006 + 1/2, 1007 + 1/2)$.

   Sprawdzamy zbieżność na końcach przedziału. Dla $x = 1006 + 1/2$ mamy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, czyli szereg harmoniczy i nie jest on zbieżny. Dla $x = 1007 + 1/2$ mamy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ i jest on zbieżny na podstawie kryterium Leibniza. Zatem ostatecznie przedział zbieżności to $(1006 + 1/2, 1007 + 1/2]$.

   A zatem

$$f(1006,9) = 0 + \frac{2 \cdot 0,1}{1} - \frac{4 \cdot 0,01}{2} + R = 0,2 - 0,02 + R = -0,18 + R.$$

   Gdzie reszta jest przestawiona następująco ($\theta \in (1007,\ 1007,1)$):

$$R = \left|\frac{f'''(\theta)(0,1)^3}{3!}\right| = \left|\frac{2^3 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 0,001}{3!(2015 - 2x)^3}\right| \le \frac{8 \cdot 0,001}{3 \cdot} \le 0,003.$$