

Analiza matematyczna 2, 2016/2017

sprawdzian – rozwiązania

grupa 16:45

25 kwietnia 2017

Wersja A

1. Zbadaj zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2n+1}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot (2n)!}{(2n)^{2n}}.$$

Zauważam, że $\sin^{2n+1}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = ((-1)^n)^{2n+1} = (-1)^n$, czyli badany szereg to:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2n)^{2n}}.$$

Sprawdźmy najpierw jego zbieżność bezwzględną korzystając z kryterium d'Alemberta:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{\left(\frac{2n+2}{2n}\right)^{2n} (2n+2)(2n+2)} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{2n}\right)^{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{2n}\right)^{2n/2}} \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e^2} < 1.$$

Zatem ten szereg jest zbieżny bezwzględnie, a więc i zbieżny po prostu.

2. Oblicz wyrażenie:

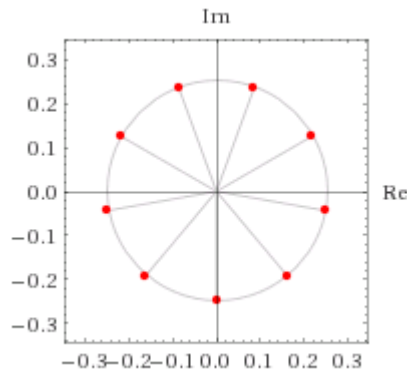
$$z = \frac{(1-i)^{2004} \cdot i^{2017}}{(-1 + \sqrt{3}i)^{1020}},$$

a następnie wylicz $\sqrt[9]{+z}$ oraz zaznacz orientacyjnie na płaszczyźnie zespolonej pozostałe $\sqrt[9]{z}$. Liczbę $\sqrt[9]{+z}$ zapisz w postaci wykładniczej.

Zatem:

x	$ x $	$\text{Arg} x$
$1-i$	$\sqrt{2}$	$-\pi/4$
$(1-i)^{2004}$	2^{1002}	$-501\pi \sim \pi$
i	1	$\pi/2$
i^{2017}	1	$1008\pi + \frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{2}$
$-1 + \sqrt{3}i$	2	$\frac{2\pi}{3}$
$(-1 + \sqrt{3}i)^{1020}$	2^{1020}	$680\pi \sim 0$
L	2^{1002}	$\frac{3\pi}{2}$
z	$1/2^{18}$	$\frac{3\pi}{2}$
$\sqrt[9]{+z}$	1/4	$\frac{\pi}{6}$

A zatem $z = -i/2^{18}$ oraz $\sqrt[9]{+z} = \frac{1}{8}(\sqrt{3} + i) = e^{\ln 1/4 + i\pi/6}$. Pozostałe pierwiastki są rozmieszczone równomiernie, co $\frac{2\pi}{9} = 40^\circ$ na okręgu o promieniu 1/4, czyli:



3. Rozwiń funkcję $f(x) = \sin 2x$ w szereg Taylora w punkcie π . Jaki jest promień zbieżności otrzymanego szeregu? Znajdź przybliżoną wartość $f(\pi + 0, 1)$ korzystając z pierwszych czterech wyrazów znalezionego szeregu. Oszacuj dokładność tego przybliżenia.

Mamy: $f'(x) = 2 \cos 2x$, $f''(x) = -4 \sin 2x$, $f'''(x) = -8 \cos 2x, \dots$, czyli:

$$f^{(2n)}(x) = 2^{2n}(-1)^n \sin 2x,$$

$$f^{(2n+1)}(x) = 2^{2n+1}(-1)^n \cos 2x,$$

w szczególności $f^{(2n)}(\pi) = 0$ oraz $f^{(2n+1)}(\pi) = 1$. Zatem:

$$f(x) = 0 + \frac{2}{1}(x - \pi) + 0 - \frac{8}{3!}(x - \pi)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(-1)^n}{(2n+1)!} (x - \pi)^{2n+1}.$$

Promień zbieżności tego szeregu najłatwiej wyliczyć korzystając z kryterium d'Alemberta:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{4}{2n \cdot (2n+1)} \rightarrow 0.$$

A zatem $R = \infty$ i szereg jest zbieżny na całej prostej $\mathbb{R}$.

Mamy:

$$f(\pi + 0, 1) \simeq 0 + \frac{2}{1}0,1 + 0 - \frac{8}{3!}(0,1)^3 = 0,2 - \frac{0,004}{3} = \frac{0,604}{3}.$$

I jest to przybliżenie z dokładnością do:

$$\left| \frac{2^4(-1)^4 \sin \theta}{4!} \cdot 0,0001 \right|,$$

gdzie $\theta \in (\pi, \pi + 0, 1)$. W takim razie, skoro $|\sin \theta| \leq 1$, to ta reszta szacuje się przez:

$$\frac{2}{3} \cdot 0,0001 \leq 0,0001.$$

Wersja B

1. Zbadaj zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2n-1} \left(n\pi - \frac{\pi}{2} \right) \cdot (2n-1)!}{(2n)^{2n-1}}.$$

Zauważam, że $\sin^{2n-1} \left(n\pi - \frac{\pi}{2} \right) ((-1)^{n+1})^{2n-1} = (-1)^{n+1}$, czyli badany szereg to:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n-1)!}{(2n)^{2n-1}}.$$

Sprawdźmy najpierw jego zbieżność bezwzględną korzystając z kryterium d'Alemberta:

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{(2n)(2n+1)}{\left(\frac{2n+2}{2n}\right)^{2n-1} (2n+2)(2n+2)} = \\ &= \frac{(2n)(2n+1)}{(2n+2)^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{2n}\right)^{2n-1}} = \frac{(2n)(2n+1)}{(2n+2)^2} \cdot \frac{1}{\left(\left(1 + \frac{2}{2n}\right)^{2n/2}\right)^2} \cdot \frac{2n+2}{2n} \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{e^2} \cdot 1 = \frac{1}{e^2} < 1. \end{aligned}$$

Zatem ten szereg jest zbieżny bezwzględnie, a więc i zbieżny po prostu.

2. Oblicz wyrażenie:

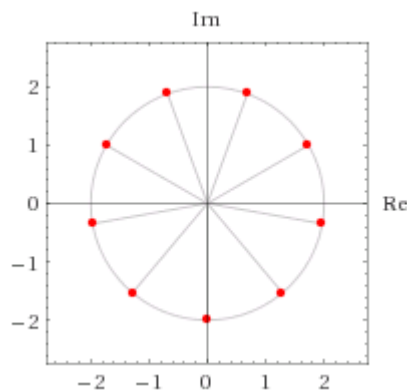
$$z = \frac{(-1 + \sqrt{3}i)^{1017} \cdot i^{2019}}{(1-i)^{2016}},$$

a następnie wylicz $\sqrt[9]{+z}$ oraz zaznacz orientacyjnie na płaszczyźnie zespolonej pozostałe $\sqrt[9]{z}$. Liczbę $\sqrt[9]{+z}$ zapisz w postaci wykładniczej.

Zatem:

x	$ x $	$\text{Arg} x$
$-1 + \sqrt{3}i$	2	$\frac{2\pi}{3}$
$(-1 + \sqrt{3}i)^{1017}$	2^{1017}	$678\pi \sim 0$
i	1	$\pi/2$
i^{2019}	1	$1009\pi + \frac{\pi}{2} \sim \frac{3\pi}{2}$
$1-i$	$\sqrt{2}$	$-\pi/4$
$(1-i)^{2016}$	2^{1008}	$-504\pi \sim 0$
L	2^{1017}	$\frac{3\pi}{2}$
z	$2^9 = 512$	$\frac{3\pi}{2}$
$\sqrt[9]{+z}$	2	$\frac{\pi}{6}$

A zatem $z = -512i$ oraz $\sqrt[9]{+z} = \sqrt{3} + i = e^{\ln 2 + i\pi/6}$. Pozostałe pierwiastki są rozmieszczone równomiernie, co $\frac{2\pi}{9} = 40^\circ$ na okręgu o promieniu 2, czyli:



3. Rozwiń funkcję $f(x) = \cos 2x$ w szereg Taylora w punkcie $\pi/4$. Jaki jest promień zbieżności otrzymanego szeregu? Znajdź przybliżoną wartość $f(\pi/4 + 0, 1)$ korzystając z pierwszych czterech wyrazów znalezionego szeregu. Oszacuj dokładność tego przybliżenia.

Mamy: $f'(x) = -2 \sin 2x$, $f''(x) = -4 \cos 2x$, $f'''(x) = 8 \sin 2x, \dots$, czyli:

$$f^{(2n)}(x) = 2^{2n}(-1)^{n+1} \cos 2x,$$

$$f^{(2n+1)}(x) = 2^{2n+1}(-1)^{n+1} \sin 2x,$$

w szczególności $f^{(2n)}(\pi/4) = 0$ oraz $f^{(2n+1)}(\pi/4) = 1$. Zatem:

$$f(x) = 0 - \frac{2}{1}(x - \pi/4) + 0 + \frac{8}{3!}(x - \pi/4)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(x - \pi/4)^{2n+1}.$$

Promień zbieżności tego szeregu najłatwiej wyliczyć korzystając z kryterium d'Alemberta:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{4}{2n \cdot (2n+1)} \rightarrow 0.$$

A zatem $R = \infty$ i szereg jest zbieżny na całej prostej $\mathbb{R}$.

Mamy:

$$f(\pi/4 + 0, 1) \simeq 0 - \frac{2}{1}0,1 + 0 + \frac{8}{3!}(0,1)^3 = -0,2 + \frac{0,004}{3} = -\frac{0,604}{3}.$$

I jest to przybliżenie z dokładnością do:

$$\left| \frac{2^4(-1)^5 \cos \theta}{4!} \cdot 0,0001 \right|,$$

gdzie $\theta \in (\pi, \pi + 0,1)$. W takim razie, skoro $|\cos \theta| \leq 1$, to ta reszta szacuje się przez:

$$\frac{2}{3} \cdot 0,0001 \leq 0,0001.$$