

Analiza matematyczna 2, 2016/2017

ćwiczenia 7. – rozwiązania

4 kwietnia 2017

1. Wykaż, korzystając z kryterium porównawczego, że poniższy szereg jest zbieżny, a następnie policz jego sumę.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 3n - 2}.$$

Zauważmy, że dla $n \geq 4$, mamy $n^2 > 3n + 2$, a zatem dla $n \geq 4$, $\frac{1}{9n^2 - 3n - 2} \leq \frac{1}{8n^2}$. Ponieważ szereg $\frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, to zbieżny jest również i badany szereg.

Aby obliczyć jego sumę, zauważmy, że $9n^2 - 3n - 2 = (3n - 2)(3n + 1)$. A zatem:

$$\frac{1}{9n^2 - 3n - 2} = \frac{1}{(3n - 2)(3n + 1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n - 2} - \frac{1}{3n + 1} \right).$$

A zatem k -ta suma częściowa, to:

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{9n^2 - 3n - 2} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{3k - 2} - \frac{1}{3k + 1} \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3k + 1} \right) \rightarrow \frac{1}{3} (1 + 0) = \frac{1}{3}.$$

A zatem badany szereg zbiega do $\frac{1}{3}$.

2. Zbadaj zbieżność szeregu oraz sprawdź, czy jest on zbieżny bezwzględnie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n((n+1)\pi) n!}{n^n}.$$

Zauważmy, że $|\cos^n((n+1)\pi)| = 1$, więc po prostu z kryterium d'Alemberta sprawdzamy, że szereg jest zbieżny bezwzględnie:

$$\frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

A zatem ten szereg jest również zbieżny po prostu.

3. Zbadaj zbieżność ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{|x^2 - nx|}{|x^2 - nx| + 1}$$

na całej prostej rzeczywistej. Udowodnij, że f_n zbiega jednostajnie na odcinku $(1, 2)$.

Zauważmy, że jeśli $x \neq 0$ oraz $n > x$, mamy:

$$f_n(x) = \frac{|x^2 - nx|}{|x^2 - nx| + 1} = \frac{|x||x - n|}{|x||x - n| + 1} = \frac{|x - n|}{|x||x - n| + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{|x||x - n|}} \rightarrow \frac{1}{1 + 0} = 1.$$

Widać także, że $f_n(0) = 0$. Zatem ciąg ten punktowo zbiega do funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ dla } x = 0 \\ 1 & \text{ wpp.} \end{cases}.$$

Ta funkcja nie jest ciągła, a funkcje f_n są ciągłe, więc zbieżność nie może być jednostajna. Natomiast na odcinku $(1, 2)$ wszystko jest w porządku, bowiem, jeśli $\varepsilon > 0$, $x \in (1, 2)$ oraz $n > 2$, to:

$$|f_n(x) - 1| = \frac{1}{|x^2 - nx| + 1} = \frac{1}{|x||x - n| + 1} \leq \frac{1}{1(n - 2) + 1} \leq \frac{1}{n - 1} < \varepsilon,$$

dla odpowiednio dużych n ($n > \frac{1}{\varepsilon} + 1$). $\square$

4. Zbadaj zbieżność szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{2n} \cdot n} (x + 2016)^n.$$

Z kryterium Cauchy'ego wiemy wyliczamy promień zbieżności:

$$\sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n}{5^{2n} \cdot n} \right|} = \frac{1}{5^2 \sqrt[n]{n}} \rightarrow \frac{1}{25}.$$

A zatem promień to $R = 25$. Czyli na pewno mamy zbieżność dla $x + 2016 \in (-25, 25)$, czyli $x \in (-2041, -1992)$, ale jeszcze trzeba zbadać zbieżność na końcach tego przedziału.

Dla $x = -2041$ mamy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-25)^n}{5^{2n} \cdot n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ – i ten szereg, czyli szereg harmoniczny, nie jest zbieżny.

Dla $x = -1992$, mamy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 25^n}{5^{2n} \cdot n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ i ten szereg jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza, bo $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. A zatem ostatecznie przedział zbieżności tego szeregu to $(-2041, -1992]$.

5. Oblicz wyrażenie:

$$z = \frac{(-i)^{2015} (1 + i\sqrt{3})^{1033}}{(1 - i)^{2016}}.$$

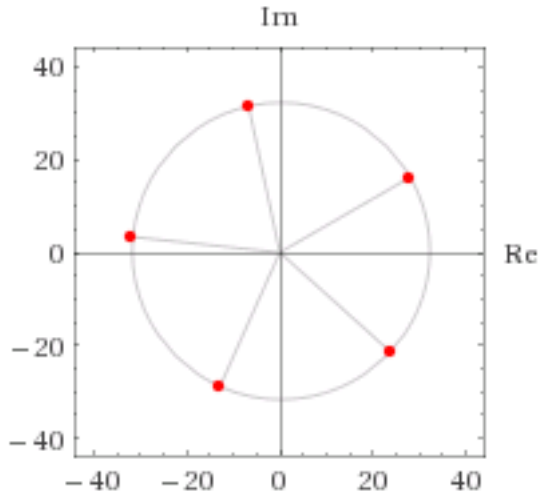
A następnie wylicz $\sqrt[5]{+z}$ oraz zaznacz orientacyjnie na płaszczyźnie zespolonej pozostałe $\sqrt[5]{z}$.

Istotne jest, że 2015 dzieli się przez 4 z resztą 3, 1033 dzieli się przez 6 z resztą 1 oraz 2016 dzieli się przez 8.

Zatem:

x	$ x $	$\text{Arg} x$
$-i$	1	$-\frac{\pi}{2}$
$1 + i\sqrt{3}$	2	$\frac{\pi}{3}$
$1 - i$	$\sqrt{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
$(-i)^{2015}$	1	$\frac{\pi}{2}$
$(1 + i\sqrt{3})^{1033}$	2^{1033}	$\frac{\pi}{3}$
$(1 - i)^{2016}$	2^{1008}	0
$(-i)^{2015} (1 + i\sqrt{3})^{1033}$	2^{1033}	$\frac{5\pi}{6}$
z	2^{25}	$\frac{5\pi}{6}$
$\sqrt[5]{+z}$	2^5	$\frac{\pi}{6}$

A zatem $z = -2^{24}\sqrt{3} + i \cdot 2^{24}$ oraz $\sqrt[5]{+z} = 16\sqrt{3} + 16i$. Pozostałe pierwiastki są rozmieszczone równomiernie, co $\frac{2\pi}{5} = 72^\circ$ na okręgu o promieniu 32, czyli:



6. Rozwiń w szereg Taylora funkcję $f(x) = \sin x + \cos x$ w punkcie $x_0 = \pi$. Jaki jest przedział zbieżności tego szeregu? Oszacuj błąd, z jakim suma pierwszych 3 wyrazów tego szeregu daje wartość $f(3)$.

Liczmy pochodne:

$$f'(x) = \cos x - \sin x,$$

$$f''(x) = -\sin x - \cos x,$$

$$f'''(x) = -\cos x + \sin x,$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x + \cos x,$$

a więc ogólnie:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \sin x + (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cos x.$$

A zatem szereg mamy następujący:

W punkcie π kolejne wartości pochodnych to: $f(\pi) = -1, f'(\pi) = -1, f''(\pi) = 1, f'''(\pi) = 1$, w szczególności $f^{(n)}(\pi) = (-1)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \sin \pi + (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cos \pi = 0 + (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot (-1) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$, a zatem mamy taki szereg:

$$-1 - (x - \pi) + \frac{(x - \pi)^2}{2!} + \frac{(x - \pi)^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} (x - \pi)^n}{n!}$$

Na podstawie kryterium d'Alemberta, widać, że promień zbieżności tego szeregu to ∞ , więc jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

A zatem

$$f(3) = -1 - (3 - \pi) + \frac{(3 - \pi)^2}{2!} + \frac{f'''(\theta)(3 - \pi)^3}{3!},$$

Gdzie $\theta \in (3, \pi)$, a zatem wartość bezwzględna błędu szacuje się następująco:

$$\left| \frac{f'''(\theta)(3 - \pi)^3}{3!} \right| = \left| \frac{(-\cos 3 + \sin 3)(3 - \pi)^3}{3!} \right| \leq \frac{2(0,142)^3}{3!} \leq 0,001.$$