

Analiza matematyczna 2, 2016/2017

ćwiczenia 6. – rozwiązania

28 marca 2017

1. Zapisać liczby w postaci wykładniczej.

$$1 - i$$

$$1 - i = e^{\ln \sqrt{2} - \frac{i\pi}{4}}$$

$$\frac{1}{1 + i}$$

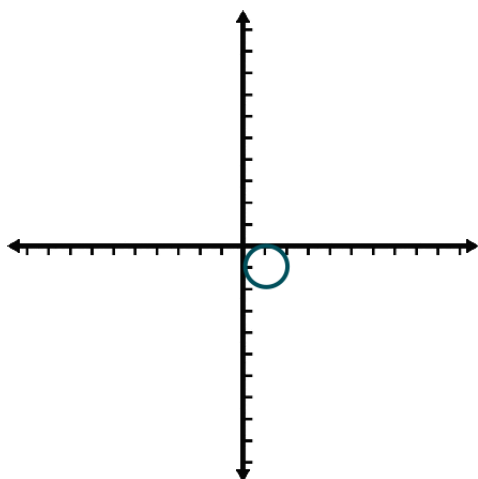
$$\frac{1}{1 + i} = \frac{1}{e^{\ln \sqrt{2} + \frac{i\pi}{4}}} = e^{-\ln \sqrt{2} - \frac{i\pi}{4}}.$$

2. Oblicz używając postaci wykładniczej:

$$\frac{(\sqrt{3} + i)^5 (1 - i\sqrt{3})^4}{(\sqrt{3} - i)^7 (1 + i\sqrt{3})^5}$$

$$\frac{(\sqrt{3} + i)^5 (1 - i\sqrt{3})^4}{(\sqrt{3} - i)^7 (1 + i\sqrt{3})^5} = \frac{e^{5 \ln 2 + \frac{5i\pi}{6}} e^{4 \ln 2 - \frac{4i\pi}{3}}}{e^{7 \ln 2 - \frac{7i\pi}{6}} e^{5 \ln 2 + \frac{5i\pi}{3}}} = e^{-3 \ln 2 - i\pi} = \frac{1}{8}(-1 + 0i) = -\frac{1}{8}.$$

3. Znajdź zbiór punktów na płaszczyźnie zespolonej, taki że $z = 1 - i + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$.



4. Korzystając z rozwinięcia Taylora oblicz trzecie przybliżenie funkcji $f(x) = e^{x-1}$ w punkcie $x_0 = 1$.
Mamy: $f^{(n)}(x) = f(x) = e^{x-1}$.

$$w_0(x) = f(1) = 1.$$

$$w_1(x) = f(1) + \frac{f'(1)(x-1)}{1!} = 1 + (x-1).$$

$$w_2(x) = f(1) + \frac{f'(1)(x-1)}{1!} + \frac{f''(1)(x-1)^2}{2!} = 1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2}.$$

$$w_3(x) = f(1) + \frac{f'(1)(x-1)}{1!} + \frac{f''(1)(x-1)^2}{2!} + \frac{f'''(1)(x-1)^3}{3!} = 1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6}.$$

5. Wypisz wzór Taylora dla n -tego rzędu dla funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ w punkcie $x_0 = -1$.

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}, f''(x) = \frac{2}{x^3}, f'''(x) = \frac{-6}{x^4}, f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}, \dots \text{ A zatem:}$$

$$\frac{1}{x} = -1 - (x+1) - (x+1)^2 - (x+1)^3 + \dots - (x+1)^n + \frac{(-1)^{n+1} \cdot (x+1)^{n+1}}{\theta^{n+1}},$$

gdzie θ jest z przedziału $(-1, x)$ lub $(x, -1)$.

6. Przedstaw wielomian $w(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ za pomocą dwumianu $(x-1)$.

$$\text{Mamy: } w'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 2x - 3, w''(x) = 12x^2 - 30x + 2,$$

$$w'''(x) = 24x - 30, w^{(4)}(x) = 24, w^{(5)}(x) = 0, \text{ a zatem: } w(1) = -2, w'(1) = -12, w''(1) = -16, w'''(1) = -6, w^{(4)}(1) = 24, \text{ czyli:}$$

$$\begin{aligned} w(x) &= f(1) + \frac{f'(1)(x-1)}{1!} + \frac{f''(1)(x-1)^2}{2!} + \frac{f'''(1)(x-1)^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(1)(x-1)^4}{4!} + 0 = \\ &= -2 - 12(x-1) - 8(x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4. \end{aligned}$$

7. Oblicz wartość $\cos(0,1)$ z dokładnością do 0,00001.

Ponieważ $|\cos^{(n)}(x)| \leq 1$, to dla rozwinięcia w zerze mamy:

$$|R_n(0,1)| = \frac{\cos^{(n+1)}(\theta)(0,1)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{(0,1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

A zatem $R_4(0,1) \leq \frac{(0,1)^5}{120} < 0,00001$, a zatem wystarczy nam trzecie przybliżenie:

$$\cos 0 + 0,1 \frac{-\sin 0}{1!} + 0,01 \frac{-\cos 0}{2!} + 0,001 \frac{\sin 0}{3!} + 0,0001 \frac{\cos 0}{4!} = 1 + 0 - \frac{0,01}{2} + 0 + \frac{0,0001}{24} = 0,9950041(6).$$

8. Udowodnij, że $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ dla $x \in (0, \pi)$.

Widać, że trzeba rozpisać rozwinięcie Taylora dla punktu 0 do 3 miejsca:

$$\sin x = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{6} + \frac{\sin \theta}{4!} x^4 > x - \frac{x^3}{6},$$

bowiem $x \in (0, \pi)$ oraz $\theta \in (0, x)$.

9. Znajdź szereg Maclarena dla następujących funkcji oraz podaj jego promień zbieżności.

$$e^x$$

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$ jest zbieżny na całej prostej rzeczywistej (np. z kryterium d'Alemberta) – jego promień zbieżności wynosi ∞ .

$$\cos x$$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ jest zbieżny na całej prostej rzeczywistej (np. z kryterium d'Alemberta) – jego promień zbieżności wynosi ∞ .

$$\sin x \cos x$$

$$f'(x) = -\sin^2 x + \cos^2 x, f''(x) = -4 \sin x \cos x, \text{ a zatem } f^{(2n)}(x) = (-4)^n \sin x \cos x \text{ oraz } f^{(2n+1)}(x) = (-4)^n (\cos^2 x - \sin^2 x).$$

A zatem $\sin x \cos x = 0 + x + 0 + \frac{-4x^3}{3!} + 0 + \frac{4x^5}{5!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-4)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$, i szereg ten z kryterium d'Alemberta jest zbieżny na całej prostej.

10. Znajdź szereg Taylora dla następujących funkcji w punkcie x_0 oraz podaj jego przedział zbieżności.

$$\frac{1}{x}, x_0 = 3$$

$$\frac{1}{x} = -1 - \frac{(x-3)}{3} - \frac{(x-3)^2}{3^2} - \frac{(x-3)^3}{3} + \dots$$

Oczywiście ten szereg jest zbieżny, jeśli $\frac{|x-3|}{3} < 1$, czyli $x \in (0, 6)$.

$$\frac{x+1}{x+2}, x_0 = 2$$

Mamy: $f(x) = 1 - \frac{1}{x+2}$, a zatem, jak wyżej $f^{(n)}(x) = \frac{n!(-1)^{n+1}}{(x+2)^{n+1}}$. A zatem nasz szereg to:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n (-1)^{n+1}}{4^n}$$

Oczywiście ten szereg jest zbieżny, jeśli $\frac{|x-2|}{4} < 1$, czyli $x \in (-2, 2)$.